Jesús Manuel Tapia

Diseño Estadístico de Experimentos

Ediciones de la Universidad Ezequiel Zamora
Colección Docencia Universitaria

Ediciones de la Universidad Nacional Experimental
de los Llanos Occidentales Ezequiel Zamora
"UNELLEZ"

Jesús Manuel Tapia

Diseño Estadístico de Experimentos

feduez
Fondo Editorial
Universidad Ezequiel Zamora

Colección: Docencia Universitaria

Queda rigurosamente prohibida la reproducción parcial o total de este libro, bajo cualquier medio audiovisual o escrito, sin la previa autorización del editor.

Diseño Estadístico de Experimentos

© UNIVERSIDAD EZEQUIEL ZAMORA
Colección: Docencia Universitaria
Barinas - Venezuela, 2010
DEPOSITO LEGAL: LF. 45520103103005
ISBN: 9789801245735

Unidad de Producción
Diagramación: Jesús Tapia
Diseño de Portada: Mario Arias
Fondo Editorial UNELLEZ
Todo los Derechos Reservados
Telefax: (0273) 5331872
Correo Electrónico:
Feduez95@hotmail.com

Impreso en Venezuela
Printed in Venezuela

Dedicado a: Junior con quien aprendí
que el afecto es un factor a dos niveles,
que no afectan el promedio del querer.
A él.

Índice general

Introducción **3**

1. Diseño de experimentos **7**
1.1. Introducción 7
1.2. Tipos de variabilidad 9
1.3. Planificación de un experimento 10
1.4. Resumen de los principales conceptos 19
1.5. Principios básicos en el diseño de experimentos 20
1.6. Algunos diseños experimentales clásicos 24

2. Diseños experimentales con un solo factor **29**
2.1. Preliminares 29
2.2. Análisis de la varianza 32
2.3. Modelos de efectos fijos 36
2.4. Comparaciones entre medias 39
2.4.1. Prueba de Fisher 40
2.4.2. Prueba de Tukey 41
2.4.3. Prueba de Duncan 43
2.4.4. Prueba de Dunnett 43
2.4.5. Prueba de Scheffé 46
2.5. Prueba de homogeneidad de la varianza 51
2.6. Transformaciones para estabilizar la Varianza 52
2.7. Modelos con efectos aleatorios 53
2.7.1. Intervalos de confianza para los componentes de la varianza 54
2.8. Uso del SPSS 56
2.9. Solución de problemas 62

3. Diseños en bloques completamente aleatorizados **83**

3.1. Preliminares 83
3.2. El modelo matemático 84
3.2.1. Eficiencia relativa 90
3.3. Diseño de cuadrado latino 93
3.3.1. Eficiencia relativa 99
3.4. Diseño de cuadrados grecolatinos 101
3.5. Uso del SPSS 104
3.6. Solución de problemas 107

4. Diseños Factoriales **119**
4.1. Preliminares 119
4.2. El modelo matemático 120
4.3. Diseños con dos factores 123
4.4. Diseños con tres factores 135
4.4.1. Modelos ANOVA con tres factores fijos 137
4.4.2. Modelos ANOVA con tres factores aleatorios 146
4.4.3. Modelos ANOVA con tres factores mixtos 147
4.5. Uso del SPSS 151
4.5.1. Modelo lineal general 152
4.6. Solución de problemas 163

5. Diseños Factoriales 2^k y 3^k **173**
5.1. Preliminares 173
5.2. Diseños factoriales 2^k 176
5.2.1. Diseños 2^2 179
5.2.2. Diseños 2^3 183
5.3. Adición de puntos centrales 187
5.4. Algoritmo de Yates para el diseño factorial 2^k 188
5.5. Diseños Factoriales 3^k 194
5.6. Uso del SPSS 197
5.7. Solución de problemas 197

6. Diseños Factoriales fraccionarios 2^{k-p} **207**
6.1. Preliminares 207
6.2. La estructura de confusión en diseños 2^{k-p} 209
6.2.1. Columnas básicas y generadores 210
6.2.2. Método 211
6.3. Concepto de resolución 212
6.4. Diseños Fraccionarios 2^{k-p} 213
6.4.1. Media Fracción 214

6.4.2. Diseños saturados 215
6.4.3. Diseños intermedios 218
6.5. Bloqueo 219
6.5.1. Bloqueo de factoriales completos 220
6.5.2. Factoriales completos divididos en más de dos bloques 221
6.5.3. Fraccionales divididos en bloques 223
6.6. Uso del SPSS 225
6.7. Solución de problemas 226

7. Diseños Jerárquicos 235
7.1. Preliminares 235
7.2. Diseños anidados 236
7.2.1. Modelos de ANOVA anidados de efectos aleatorios . . 242
7.2.2. Modelos de ANOVA anidados de efectos mixtos 244
7.3. Diseños cruzado-anidados 248
7.3.1. Modelo I 249
7.3.2. Modelo II 251
7.3.3. Modelo III: modelos con efectos mixtos 253
7.4. Uso del SPSS 255
7.5. Solución de problemas 256

8. Diseños con medidas repetidas 267
8.1. Preliminares 267
8.2. Prueba de Mauchly 269
8.3. Modelos Diseños con medidas repetidas en un factor intrasujetos 275
8.4. Modelo con medidas repetidas en dos factores intra-sujetos . 277
8.5. Dieños de medidas parcialmente repetidas 280
8.5.1. Diseño de parcelas divididas 281
8.5.2. El modelo matemático 283
8.5.3. Comparaciones múltiples 286
8.6. Diseños con medidas repetidas en SPSS 287
8.7. Solución de problemas 292

9. Modelos de regresión lineal 317
9.1. Introducción 317
9.2. Modelo de regresión lineal simple 318
9.2.1. Interpretación de los parámetros 320
9.2.2. Calidad del ajuste 321
9.2.3. Análisis de la varianza 321
9.2.4. Coeficiente de determinación 322

9.2.5. Coeficiente R de Pearson 323
9.2.6. Error típico de estimación 324
9.2.7. Sobre muestras y poblaciones 324
9.2.8. Supuestos teóricos del modelo de regresión 325
9.2.9. Inferencia sobre los parámetros poblacionales 327
9.2.10. Análisis de los residuos 332
9.2.11. Gráficos de residuos contra valores $\widehat{y}_i$ 334
9.3. Modelo de regresión lineal múltiple 335
9.3.1. Descripción de los datos 335
9.3.2. Supuestos del modelo poblacional 336
9.3.3. Estimación del modelo 337
9.3.4. Sesgo y varianza de los estimadores 338
9.3.5. El coeficiente de correlación múltiple y el Análisis de la varianza 339
9.3.6. Estadísticos asociados a las variables independientes . 341
9.3.7. El coeficiente de correlación parcial 344
9.3.8. Métodos de inclusión de variables por etapas 344
9.3.9. Introducción de variables cualitativas 347
9.3.10. Cambio de escala 348
9.4. Regresión lineal con SPSS 349
9.5. Solución de Problemas 359

10. Análisis de covarianza **373**
10.1. Preliminares 373
10.2. Supuestos teóricos 374
10.3. El modelo mátematico 376
10.3.1. Diseños unifactoriales 376
10.3.2. Diseños en bloques al azar 380
10.3.3. Diseños cuadrados latinos 383
10.4. Covarianza múltiple 386
10.5. Uso del SPSS 389
10.6. Solución de problemas 391

Bibliografía **405**

Acerca del texto y del autor

Los investigadores en general, planifican sus experimentos, ensayos o investigaciones con el propósito de recopilar la mayor cantidad de información pertinente, y así, de esta manera alcanzar los objetivos que se persiguen. Por consiguiente, diseñar un experimento es planificarlo con antelación para hacer posible un análisis objetivo del mismo. En tal sentido, el diseño de experimental es un medio de importancia crítica en muchas disciplinas y vital para el quehacer científico. Así, pues, la obra del Prof. Jesús Tapia, resulta más que una introducción al diseño y análisis de experimentos, no sólo se expone detalladamente aspectos esenciales del Diseño experimental concebido desde una óptica clásica, sino que representa una contribución que sin lugar a dudas debe ser considerado por docentes e investigadores de pregrado y postgrado, como una herramienta tanto para la docencia como para la investigación, puesto que los alcances del presente trabajo tocan aspectos que van más allá de las generalidades del diseño de experimentos.

Aún cuando, el autor es matemático de formación, este libro desde mi muy modesta comprensión de los métodos estadísticos, se presenta como una amplia investigación en lo que ha sido el desarrollo de las diferentes metodologías del diseño experimental. Esta obra desde mi punto de vista, refleja la influencia que tuvo en el autor sus años como docente en el Vice-Rectorado de Producción Agrícola de la UNELLEZ en Guanare, donde el uso y aplicación del diseño experimental es parte de la rutina de los docentes e investigadores que allí, laboramos.

Prof.Danny Villegas
UNELLEZ-Guanare. 2010

Introducción

Los resultados relativos a una investigación experimental, constituyen la más valiosa fuente de información para el investigador, pero la calidad de los datos es fundamental para el levantamiento de la infromación; la planificación adecuada de un experimento conduce a datos contentivos de los requerimientos necesarios para la obtención de conclusiones fiables al finalizar el experimento.

Planificar un experimento consiste en la selección correcta de la variable dependiente o respuesta y de la variable o las variables independientes que pueden afectar los valores de la respuesta, las variables independientes son denominadas factores, son variables del tipo categórico, cada categoría se denomina nivel, las combinaciones de los niveles de las variables independientes se conocen como tratamiento, así, la selecciona adecuada de los factores, sus niveles y los tratamientos son indispensables para una buena planificación del experimento.

Diseñar estadísticamente un experimento, es realizar una prueba o una serie de pruebas, buscando caracterizar las variables explicativas o factores de mayor influencia en un ensayo de interés, evaluado a través de una variable respuesta tal que, si deliberada o sistemáticamente se introducen cambios controlados en algunas de las variables explicativas del proceso, siempre sea posible observar o cuantificar los cambios que éstos generan en la variable respuesta buscando adicionalmente, minimizar el efecto de las variables no controlables, procurando con ello estabilizar y minimizar la variabilidad de las respuestas.

Diseñar y analizar estadísticamente un experimento, consiste en la selección de un modelo matemático que permita predecir o estimar el valor de la variable respuesta en término de los efectos relativos a los factores y de un componente aleatorio, que aglomera a factores no considerados por el investigador o fuentes de variabilidad no controladas a la hora de realizar el ensayo de interés.

En cualquier aplicación de la estadística en el diseño y análisis de un experimento, es necesario que quienes lo desarrollen entiendan claramente el problema objeto de estudio, que posean un amplio conocimiento del material experimental a usar, que conozcan las posibilidades existentes para coleccionar los datos y además posean el conocimiento estadístico necesario para direccionar e interpretar adecuadamente los resultados del experimento.

Los métodos relativos al diseño y análisis estadístico de experimentos tiene su origen en los trabajos de Fisher a comienzo de la decáda de 1930, en años posteriores otros investigadores en el área, realizaron diferentes aportes al diseño experimental, todas estas técnicas son conocidas como modelos clásicos del diseño de experimentos. Los diseños clásicos de experimentos son el objeto de estudio de la publicación que usted tiene en sus manos, consta de once capítulos, en los cuales se introduce al lector en el campo del diseño y análisis estadístico de experimentos.

El primer capítulo describe los conceptos básicos de los diseños experimentales, además se definen los principales métodos de diseño y análisis estadístico de experimentos, el conocimiento e interpretación correcta de estos tópicos es fundamental para la lectura y aplicación de los temas subsiguientes.

El modelo elemental de los diseños experimentales lo constituye el modelo unifactorial completamente al azar, en el cual se evalúa la existencia o no de efectos estadísticamente significativos de los niveles de una única variable independiente sobre la variable respuesta, el factor de interés posee al menos tres niveles. Este modelo es formulado en el segundo capítulo del texto, la implementación de estos diseños mediante la aplicación informática SPSS son considerados al final del capítulo.

En algunas oportunidades el investigador agrupa a los individuos o unidades experimentales en conglomerados o bloques con el fin de reducir la variabilidad asociada al error o componente aleatorio del modelo, en tal caso los conglomerados definen una variable conocida como variable de bloqueo, cada modalidad de la variable de bloque constituye un nivel del factor, pero en realidad no interesa conocer la interacción de la variable de bloque con otros factores considerados en el ensayo, el estudio de este tipo de modelo se realiza en el tercer capítulo, los fundamentos teóricos se describen de manera detallada al inicio, su aplicación a situaciones reales de interés se implementan mediante el SPSS al final del tema.

En la práctica, al diseñar estadísticamente un experimento, el investigador encuentra que las fuentes de variabilidad sistémica de la variable respuesta están asociadas a más de un factor, razón por la cual los diseños unifactoriales al azar son inaplicables a múltiples ensayos de campo, en tal sentido es necesario extender el estudio a diseños experimentales múltifac-

toriales, en otras palabras, diseño en los cuales se evalúa el efecto de dos o más factores y de la interacción de combinaciones de ellos sobre la variable respuesta. El estudio teórico de estos modelos y su implementación mediante el SPSS, son desarrollados en el cuarto capítulo de la obra.

Por razones económicas o de tiempo, en la planificación de diseños experimentales, considerar k factores con dos o tres niveles cada uno de ellos, es una situación práctica, que los investigadores con frecuencia deben abordar, los diseños 2^k y 3^k permiten investigar simultáneamente los efectos de k diferentes factores, sobre la variable dependiente. En el capítulo cinco los diseños factoriales 2^k y 3^k se estudian en detalle y se implementan mediante la aplicación informática considerada.

En diseños experimentales exploratorio, estudiar todos los niveles de un factor podría ocasionar gastos económicos y de tiempo elevados, que podrían ser irrelevante para los fines del ensayo, entonces una fracción de la totalidad de los tratamientos puede generar la información detallada y completa para el investigador, la modalidad de diseños 2^{k-p} son la opción recomendada en estos caso. El capítulo seis está dedica al estudio y aplicación práctica de esta modalidad de diseños experimentales.

Cuando en un diseño de investigación los niveles de al menos uno de los factores, que generalmente es de clasificación, (*Variable anidada), se representa únicamente en uno de los niveles de una variable de tratamiento (*variable de anidamiento) se dice que el diseño es del tipo jerárquico. Por tanto, es un diseño estructuralmente incompleto en el que se generan menos condiciones experimentales que combinaciones posibles entre los factores. La formulación teórica de diseños anidados o jerárquicos se desarrolla en el séptimo capítulo, aun cuando este tipo de diseño no se presentan de manera explícita en las cajas de diálogo del SPSS, mediante secuencias de sintaxis propias del software se implementan las aplicaciones prácticas de los diseños anidados.

En diferentes situaciones prácticas el investigador se encuentra con conjunto de variables cuantitativas que se suponen son comparable, la teénica estadístima más apropiada para el análisis de diseños experimentales con esta característico son los modelos con mediadas repetidas. Los diseños con medidas repetidas sirven para estudiar el efecto de uno o más factores cuando al menos uno de ellos es un factor *intra-sujetos*. En los diseños con factores *inter-sujetos o completamente aleatorizados*, a cada nivel del factor se le asigna o le corresponde un grupo diferente de sujetos. Por el contrario, los diseños con un factor *intra-sujetos o con medidas repetidas*, se caracterizan porque todos los niveles del factor se aplican a los mismos sujetos. El estudio teórico y la implementación, mediante el SPSS, de los diseños con medidas repetidas es tratado en el capítulo ocho del texto. Los diseños Split-Plot

o en parcelas divididas son estudiados en el capítulo nuevo como un caso particular de diseños con medidas parcialmente repetidas.

El análisis de regresión lineal es una técnica estadística de gran utilidad, en estudios donde se desea establecer la magnitud y modelo matemático que explique la relación efecto causa entre una variable dependiente y una o más variables independiente, los modelos de regresión lineal simple y múltiple son considerados en el capítulo diez, se estudian los fundamentos teóricos y sus aplicaciones a casos prácticos empleando los comandos del SPSS asociados al tema.

En el último capítulo del texto se estudia el análisis de covarianza, el análisis de covarianza es una técnica estadística que combina dos métodos de anaálisis de datos: el análisis de regresión y el análisis de la varianza, su origen al igual que la mayoría de los diseños estudiados en el texto, se remonta a los trabajos de Fisher, la utilidad de este tipo de diseños radica en el uso de una variable cuantitativa, independiente de los niveles del factor que puede tener un efecto significativo sobre la variable respuesta, y el investigador esta interesado en determinar la existencia o no. Los fundamentos teóricos del análisis de covarianza son desarrollados en detalle en el capítulo nueve, de manera inmediata se describen los campos y cajas de diálogo relativas al análisis de covarianza existente en el SPSS y su implementación mediante situaciones prácticas finalizan el tema.

Quizás para los conocedores del tema de los diseños clásicos de experimentos el texto, en teoría, trate los tópicos desarrollados a cualquier otro texto de diseño y análisis estadístico de experimento, pero el aporte de la obra es la implementación de las diferentes técnicas de análisis de diseño de experimentos mediante la aplicación informátca SPSS, un software amigable y completo para los fines diágticos del texto. Dejamos a la consideración de la comunidad interesada en el diseño y análisis estadístico de experimentos, la presente obra.

El autor

Capítulo 1

Diseño de experimentos

1.1. Introducción

Los modelos de "*Diseño de experimentos*"son modelos estadísticos clásicos cuyo objetivo es averiguar si unos determinados factores influyen en la variable de interés y, si existe influencia de algún factor, cuantificarla. Ejemplos donde habría que utilizar estos modelos son los siguientes:

- En el rendimiento de un determinado tipo de máquinas (unidades producidas por día) se desea estudiar la influencia del trabajador que la maneja y la marca de la máquina.

- Se quiere estudiar la influencia del tipo de pila eléctrica y de la marca en la duración de las pilas.

- Una compañía telefónica está interesada en conocer la influencia de varios factores en la variable de interés "la duración de una llamada telefónica". Los factores que se consideran son los siguientes: hora a la que se produce la llamada; día de la semana en que se realiza la llamada; zona de la ciudad desde la que se hace la llamada; sexo del que realiza la llamada; tipo de teléfono (público o privado) desde el que se realiza la llamada.

- Una compañía de software está interesada en estudiar la variable "porcentaje que se comprime un archivo al utilizar un programa que comprime archivos" teniendo en cuenta el tipo de programa utilizado y el tipo de archivo que se comprime.

- Se quiere estudiar el rendimiento de los alumnos en una asignatura y, para ello, se desean controlar diferentes factores: profesor que imparte la asignatura; método de enseñanza; sexo del alumno.

La metodología del diseño de experimentos se basa en la experimentación. Es conocido que si se repite un experimento, en condiciones indistinguibles, los resultados presentan variabilidad que puede ser grande o pequeña. Si la experimentación se realiza en un laboratorio donde la mayoría de las causas de variabilidad están muy controladas, el error experimental será pequeño y habrá poca variación en los resultados del experimento. Pero si se experimenta en procesos industriales, administrativos, entre otros, la variabilidad es grande en la mayoría de los casos.

El objetivo del diseño de experimentos es estudiar si utilizar un determinado tratamiento produce una mejora en el proceso o no. Para ello se debe experimentar utilizando el tratamiento y no utilizándolo. Si la variabilidad experimental es grande, sólo se detectará la influencia del uso del tratamiento cuando éste produzca grandes cambios en relación con el error de observación.

La metodología del Diseño de Experimentos estudia cómo variar las condiciones habituales de realización de un proceso empírico para aumentar la probabilidad de detectar cambios significativos en la respuesta, de esta forma se obtiene un mayor conocimiento del comportamiento del proceso de interés.

Para que la metodología de diseño de experimentos sea eficaz es fundamental que el experimento esté bien diseñado. Un experimento se realiza por alguno de los siguientes motivos:

- Determinar las principales causas de variación en la respuesta.
- Encontrar las condiciones experimentales con las que se consigue un valor extremo en la variable de interés o respuesta.
- Comparar las respuestas en diferentes niveles de observación de variables controladas.
- Obtener un modelo estadístico-matemático que permita hacer predicciones de respuestas futuras.

La utilización de los modelos de diseño de experimentos se basa en la experimentación y en el análisis de los resultados que se obtienen en un experimento bien planificado. En muy pocas ocasiones es posible utilizar estos métodos a partir de datos disponibles o datos históricos, aunque también

se puede aprender de los estudios realizados a partir de datos recogidos por observación, de forma aleatoria y no planificada.

En el análisis estadístico de datos históricos se pueden cometer diferentes errores, los más comunes son los siguientes:

Inconsistencia de los datos: los procesos cambian con el tiempo, se producen cambios en el personal (cambios de personas, mejoras del personal por procesos de aprendizaje, motivación, ...), cambios en las máquinas (reposiciones, reparaciones, envejecimiento, ...). Estos cambios tienen influencia en los datos recogidos, lo que hace que los datos históricos sean poco fiables, sobre todo si se han recogido en un amplio espacio de tiempo.

Variables con fuerte correlación: puede ocurrir que en el proceso existan dos o más variables altamente correlacionadas que pueden llevar a situaciones confusas. Por ejemplo, en el proceso hay dos variables X_1 y X_2 fuertemente correlacionadas que influyen en la respuesta, pero si en los datos que se tiene aumenta al mismo tiempo el valor de las dos variables no es posible distinguir si la influencia es debida a una u otra o a ambas variables (confusión de los efectos). Otra situación problemática se presenta si solo se dispone de datos de una variable (por ejemplo de X_1 y no de X_2), lo que puede llevar a pensar que la variable influyente es la X_1 cuando, en realidad, la variable influyente es la X_2 (variable oculta).

El rango de las variables controladas es limitado: si el rango de una de las variables importantes e influyentes en el proceso es pequeño, no se puede saber su influencia fuera de ese rango y puede quedar oculta su relación con la variable de interés o los cambios que se producen en la relación fuera del rango observado. Esto suele ocurrir cuando se utilizan los datos recogidos al trabajar el proceso en condiciones normales y no se experimenta (cambiando las condiciones de funcionamiento) para observar el comportamiento del proceso en situaciones nuevas.

1.2. Tipos de variabilidad

Uno de los principales objetivos de los modelos estadísticos y, en particular, de los modelos de diseño de experimentos, es controlar la variabilidad de un proceso estocástico que puede tener diferente origen. De hecho, los resultados de cualquier experimento están sometidos a tres tipos de variabilidad cuyas características son las siguientes:

Variabilidad sistemática y planificada: esta variabilidad viene originada por la posible dispersión de los resultados debida a diferencias sistemáticas entre las distintas condiciones experimentales impuestas en el diseño por expreso deseo del experimentador. Es el tipo de variabilidad que se intenta identificar con el diseño estadístico. Cuando este tipo de variabilidad está presente y tiene un tamaño importante, se espera que las respuestas tiendan a agruparse formando grupos (clusters). Es deseable que exista esta variabilidad y que sea identificada y cuantificada por el modelo.

Variabilidad típica de la naturaleza del problema y del experimento: es la variabilidad debida al ruido aleatorio. Este término incluye, entre otros, a la componente de variabilidad no planificada denominada error de medida. Es una variabilidad impredecible e inevitable. Esta variabilidad es la causante de que si en un laboratorio se toman medidas repetidas de un mismo objeto ocurra que, en muchos casos, la segunda medida no sea igual a la primera y, más aún, no se puede predecir sin error el valor de la tercera. Sin embargo, bajo el aparente caos, existe un patrón regular de comportamiento en esas medidas: todas ellas tenderán a fluctuar en torno a un valor central y siguiendo un modelo de probabilidad que será importante estimar. Esta variabilidad es inevitable pero, si el experimento ha sido bien planificado, es posible estimar (medir) su valor, lo que es de gran importancia para obtener conclusiones y poder hacer predicciones. Es una variabilidad que va a estar siempre presente pero que es tolerable.

Variabilidad sistemática y no planificada: esta variabilidad produce una variación sistemática en los resultados y es debida a causas desconocidas y no planificadas. En otras palabras, los resultados están siendo sesgados sistemáticamente por causas desconocidas. La presencia de esta variabilidad supone la principal causa de conclusiones erróneas y estudios incorrectos al ajustar un modelo estadístico. Como se estudiará posteriormente, existen dos estrategias básicas para tratar de evitar la presencia de este tipo de variabilidad: la aleatorización y la técnica de bloques. Este tipo de variabilidad debe de intentar evitarse y su presencia lleva a conclusiones erróneas.

1.3. Planificación de un experimento

La experimentación forma parte natural de la mayoría de las investigaciones científicas e industriales, en muchas de las cuales, los resultados del

proceso de interés se ven afectados por la presencia de distintos factores, cuya influencia puede estar oculta por la variabilidad de los resultados muestrales. Es fundamental conocer los factores que influyen realmente y estimar esta influencia. Para conseguir ésto es necesario experimentar, variar las condiciones que afectan a las unidades experimentales y observar la variable respuesta. Del análisis y estudio de la información recogida se obtienen las conclusiones.

La forma tradicional que se utilizaba en la experimentación, para el estudio de estos problemas, se basaba en estudiar los factores uno a uno, ésto es, variar los niveles de un factor permaneciendo fijos los demás. Esta metodología presenta grandes inconvenientes:

- Es necesario un gran número de pruebas.
- Las conclusiones obtenidas en el estudio de cada factor tiene un campo de validez muy restringido.
- No es posible estudiar la existencia de interacción entre los factores.
- Es inviable, en muchos casos, por problemas de tiempo o costo.

Las técnicas de diseño de experimentos se basan en estudiar simultáneamente los efectos de todos los factores de interés, son más eficaces y proporcionan mejores resultados con un menor coste.

A continuación se enumeran las etapas que deben seguirse para una correcta planificación de un diseño experimental, etapas que deben ser ejecutadas de forma secuencial. También se introducen algunos conceptos básicos en el estudio de los modelos de diseño de experimentos.

Las etapas a seguir en el desarrollo de un problema de diseño de experimentos son las siguientes:

1. Definir los objetivos del experimento.
2. Identificar todas las posibles fuentes de variación, incluyendo:
   - factores tratamiento y sus niveles,
   - unidades experimentales,
   - factores nuisance (molestos): factores bloque, factores ruido y covariables.
3. Elegir una regla de asignación de las unidades experimentales a las condiciones de estudio (tratamientos).
4. Especificar las medidas con que se trabajará (la respuesta), el procedimiento experimental y anticiparse a las posibles dificultades.

5. Ejecutar un experimento piloto.
6. Especificar el modelo.
7. Esquematizar los pasos del análisis.
8. Determinar el tamaño muestral.
9. Revisar las decisiones anteriores. Modificarlas si se considera necesario.

Los pasos del listado anterior no son independientes y en un determinado momento puede ser necesario volver atrás y modificar decisiones tomadas en algún paso previo. A continuación se hace una breve descripción de las decisiones que hay que tomar en cada uno de los pasos enumerados. Sólo después de haber tomado estas decisiones se procederá a realizar el experimento.

Definir los objetivos del experimento: se debe hacer una lista completa de las preguntas concretas a las que debe dar respuesta el experimento. Es importante indicar solamente cuestiones fundamentales ya que tratar de abordar problemas colaterales pueden complicar innecesariamente el experimento.

Una vez elaborada la lista de objetivos, puede ser útil esquematizar el tipo de conclusiones que se espera obtener en el posterior análisis de datos.

Normalmente la lista de objetivos es refinada a medida que se van ejecutando las etapas del diseño de experimentos.

Identificar todas las posibles fuentes de variación: una fuente de variación es cualquier "cosa" que pueda generar variabilidad en la respuesta. Es recomendable hacer una lista de todas las posibles fuentes de variación del problema, distinguiendo aquellas que, a priori, generarán una mayor variabilidad. Se distinguen dos tipos:

Factores tratamiento: son aquellas fuentes cuyo efecto sobre la respuesta es de particular interés para el experimentador.

Factores "nuisance": son aquellas fuentes que no son de interés directo pero que se contemplan en el diseño para reducir la variabilidad no planificada.

A continuación se precisan más estos importantes conceptos.

Factores y sus niveles: se denomina *factor* tratamiento a cualquier variable de interés para el experimentador cuyo posible efecto sobre la respuesta se quiere estudiar.

Los *niveles de un factor tratamiento* son los tipos o grados específicos del factor que se tendrán en cuenta en la realización del experimento. Los factores tratamiento pueden ser cualitativos o cuantitativos. Ejemplos de factores cualitativos y sus niveles respectivos son los siguientes:

- proveedor (diferentes proveedores de una materia prima)
- tipo de máquina (diferentes tipos o marcas de máquinas)
- trabajador (los trabajadores encargados de hacer una tarea)
- tipo de procesador (los procesadores de los que se quiere comparar su velocidad de ejecución)
- un aditivo químico (diferentes tipos de aditivos químicos)
- el sexo (hombre y mujer)
- un método de enseñanza (un número determinado de métodos de enseñanza cuyos resultados se quieren comparar)

Ejemplos de factores cuantitativos son los siguientes:

- tamaño de memoria (diferentes tamaños de memoria de los PC)
- droga (distintas cantidades de la droga)
- la temperatura (conjuntos de temperaturas seleccionadas en unos rangos de interés)

Debe tenerse en cuenta que en el tratamiento matemático de los modelos de diseño de experimento los factores cuantitativos son tratados como cualitativos y sus niveles son elegidos equiespaciados o se codifican.

Por lo general, un factor no suele tener más de cuatro niveles. Cuando en un experimento se trabaja con más de un factor, se denomina:

Tratamiento: a cada una de las combinaciones de niveles de los distintos factores.

Observación: es una medida en las condiciones determinadas por uno de los tratamientos.

Experimento factorial: es el diseño de experimentos en que existen observaciones de todos los posibles tratamientos.

Unidades experimentales: son el material donde evaluar la variable respuesta y al que se le aplican los distintos niveles de los factores tratamiento.

Ejemplos de unidades experimentales son:

- en informática PC, páginas web, buscadores de internet,
- en agricultura, parcelas de tierra.
- en medicina, individuos humanos u animales.
- en industria, lotes de material, trabajadores, máquinas.

Cuando un experimento se ejecuta sobre un período de tiempo de modo que las observaciones se recogen secuencialmente en instantes de tiempo determinados, entonces los propios instantes de tiempo pueden considerarse unidades experimentales. Es muy importante que las unidades experimentales sean representativas de la población sobre la que se han fijado los objetivos del estudio. Por ejemplo, si se utilizan los estudiantes universitarios de un país como unidades experimentales, las conclusiones del experimento no son extrapolables a toda la población adulta del país.

Factores "nuisance": bloques, factores ruido y covariables: en cualquier experimento, además de los factores tratamiento cuyo efecto sobre la respuesta se quiere evaluar, también influyen otros factores, de escaso interés en el estudio, pero cuya influencia sobre la respuesta puede aumentar significativamente la variabilidad no planificada. Con el fin de controlar esta influencia pueden incluirse en el diseño nuevos factores que, atendiendo a su naturaleza, pueden ser de diversos tipos.

Factor bloque: en algunos casos el factor nuisance puede ser fijado en distintos niveles, de modo que es posible controlar su efecto a esos niveles. Entonces la forma de actuar es mantener constante el nivel del factor para un grupo de unidades experimentales, se cambia a otro nivel para otro grupo y así, sucesivamente. Estos factores se denominan factores de bloqueo (factores-bloque) y las unidades experimentales evaluadas en un mismo nivel del bloqueo se dice que pertenecen al mismo bloque. Incluso cuando el factor nuisance no es medible, a veces es posible agrupar las unidades experimentales en bloques de unidades similares: parcelas de tierra contiguas o períodos de tiempo próximos probablemente conduzcan a unidades experimentales más parecidas que parcelas o períodos distantes. Desde un punto de vista matemático el tratamiento que se hace de los factores-bloque es el mismo que el de los factores-tratamiento en los que no hay interacción, pero su concepto dentro del modelo de diseño de experimentos es diferente. Un factor-tratamiento es un factor en el que se está interesado en conocer su influencia en la variable respuesta y un factor-

bloque es un factor en el que no se está interesado en conocer su influencia pero se incorpora al diseño del experimento para disminuir la variabilidad residual del modelo.

Covariable: si el factor nuisance es una propiedad cuantitativa de las unidades experimentales que puede ser medida antes de realizar el experimento (el tamaño de un archivo informático, la presión sanguínea de un paciente en un experimento médico o la acidez de una parcela de tierra en un experimento agrícola). El factor se denomina covariable y juega un papel importante en el análisis estadístico.

Ruido: si el experimentador está interesado en la variabilidad de la respuesta cuando se modifican las condiciones experimentales, entonces los factores nuisance son incluidos deliberadamente en el experimento y no se aísla su efecto por medio de bloques. Se habla entonces de factores ruido. En resumen, las posibles fuentes de variación de un experimento son:

Fuente	Tipo
Factores de interés	Planificada y sistemática
Factores nuisance	Planificaad y sistemática
No controlada	No planificada pero Sistemática?

Tabla 1.1:

Elegir una regla de asignación de las unidades experimentales: la regla de asignación o diseño experimental especifica que unidades experimentales se observarán bajo cada tratamiento. Hay diferentes posibilidades:

- diseño factorial o no,
- anidamiento,
- asignación al azar en determinados niveles de observación,
- el orden de asignación, etc.

En la práctica, existen una serie de diseños estándar que se utilizan en la mayoría de los casos.

Especificar las medidas de la respuesta: los datos que se recogen en un experimento son medidas de una variable denominada variable respuesta o variable de interés. Es importante precisar de antemano cuál es la

variable respuesta y en qué unidades se mide. Naturalmente, la respuesta está condicionada por los objetivos del experimento. Por ejemplo, si se desea detectar una diferencia de 0.05 gramos en la respuesta de dos tratamientos no es apropiado tomar medidas con una precisión próxima al gramo.

A menudo aparecen dificultades imprevistas en la toma de datos. Es conveniente anticiparse a estos imprevistos pensando detenidamente en los problemas que se pueden presentar o ejecutando un pequeño experimento piloto. Enumerar estos problemas permite en ocasiones descubrir nuevas fuentes de variación o simplificar el procedimiento experimental antes de comenzar.

También se debe especificar con claridad la forma en que se realizarán las mediciones: instrumentos de medida, tiempo en el que se harán las mediciones, etc.

Ejecutar un experimento piloto: un experimento piloto es un experimento que utiliza un número pequeño de observaciones. El objetivo de su ejecución es ayudar a completar y chequear la lista de acciones a realizar. Las ventajas que proporciona la realización de un pequeño experimento piloto son las siguientes:

- permite practicar la técnica experimental elegida e identificar problemas no esperados en el proceso de recogida de datos,
- si el experimento piloto tiene un tamaño suficientemente grande puede ayudar a seleccionar un modelo adecuado al experimento principal,
- los errores experimentales observados en el experimento piloto pueden ayudar a calcular el número de observaciones que se precisan en el experimento principal.

Especificar el modelo: el modelo matemático especificado debe indicar la relación que se supone que existe entre la variable respuesta y las principales fuentes de variación identificadas en el experimento piloto. Es fundamental que el modelo elegido se ajuste a la realidad con la mayor precisión posible.

El modelo más habitual es el modelo lineal:

$$y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \xi$$

En este modelo la respuesta viene dada por una combinación lineal de términos que representan las principales fuentes de variación planificada más un término residual debido a las fuentes de variación no planificada. Los modelos que se estudian en este texto se ajustan a esta forma general. El experimento piloto puede ayudar a comprobar si el modelo se ajusta razonablemente bien a la realidad.

Los modelos de diseño de experimentos, según sean los factores incluídos en el mismo, se pueden clasificar en: modelo de efectos fijos, modelo de efectos aleatorios y modelos mixtos. A continuación se precisan estas definiciones.

Factor de efectos fijos: es un factor en el que los niveles han sido seleccionados por el experimentador. Es apropiado cuando el interés se centra en comparar el efecto sobre la respuesta de esos niveles específicos.

Ejemplo 1.1 *Un empresario está interesado en comparar el rendimiento de tres máquinas del mismo tipo que tiene en su empresa.*

Factor de efectos aleatorios: es un factor del que sólo se incluyen en el experimento una muestra aleatoria simple de todos los posibles niveles del mismo. Evidentemente se utilizan estos factores cuando tienen un número muy grande de niveles y no es razonable o posible trabajar con todos ellos. En este caso se está interesado en examinar la variabilidad de la respuesta debida a la población entera de niveles del factor.

Ejemplo 1.2 *Una cadena de hipermercados que tiene en plantilla 300 trabajadores de caja está interesada en estudiar la influencia del factor trabajador en la variable "tiempo en el cobro al cliente".*

Modelo de efectos fijos: es un modelo en el que todos los factores son factores de efectos fijos.

Modelo de efectos aleatorios: es un modelo en el que todos los factores son factores de efectos aleatorios.

Modelo mixto: es un modelo en el que hay factores de efectos fijos y factores de efectos aleatorios.

Esquemátizar los pasos del análisis estadístico: el análisis estadístico a realizar depende de:

- los objetivos formulados por el investigador.

- el diseño seleccionado en función al interés y a los objetivos.
- el modelo asociado que explica la variable respuesta en función a los efectos de los factores.

  Se deben esquemátizar los pasos del análisis a realizar que deben incluir:

- estimaciones que hay que calcular,
- contrastes a realizar,
- intervalos de confianza que se calcularán
- diagnosis y crítica del grado de ajuste del modelo a la realidad.

Determinar el tamaño muestral: calcular el número de observaciones que se deben tomar para alcanzar los objetivos del experimento. Existen, dependiendo del modelo, algunas fórmulas para determinar este tamaño. Todas ellas sin embargo requieren el conocimiento del tamaño de la variabilidad no planificada (no sistemática y sistemática, si es el caso) y estimarlo a priori no es fácil, siendo aconsejable sobreestimarla. Normalmente se estima a partir del experimento piloto y en base a experiencias previas en trabajos con diseños experimentales semejantes.

Revisar las decisiones anteriores, modificar si es necesario: De todas las etapas enumeradas, el proceso de recogida de datos suele ser la tarea que mayor tiempo consume, pero es importante realizar una planificación previa, detallando los pasos anteriores, lo que garantizará que los datos sean utilizados de la forma más eficiente posible.

Es fundamental tener en cuenta que "*Ningún método de análisis estadístico, por sofisticado que sea, permite extraer conclusiones correctas en un diseño de experimentos mal planificado*".

Recíprocamente, debe quedar claro que el análisis estadístico es una etapa más que está completamente integrado en el proceso de planificación. " El análisis estadístico no es un segundo paso independiente de la tarea de planificación. Es necesario comprender la totalidad de objetivos propuestos antes de comenzar con el análisis. Si no se hace así, tratar que el experimento responda a otras cuestiones *a posteriori* puede ser (lo será casi siempre) imposible".

Pero no sólo los objetivos están presentes al inicio del análisis sino también la técnica experimental empleada. Una regla de oro en la experimentación y que debe utilizarse es la siguiente:

"*No invertir nunca todo el presupuesto en un primer conjunto de experimentos y utilizar en su diseño toda la información previa disponible*".

Finalmente indicar que todas las personas que trabajan en el experimento se deben implicar en el mismo, esto es:

"*Toda persona implicada en la ejecución del experimento y en la recolección de los datos debe ser informada con precisión de la estrategia experimental diseñada*".

1.4. Resumen de los principales conceptos

En esta sección se hace un resumen de la terminología común utilizada en la teoría de los modelos de diseño de experimentos:

Unidad experimental: son los objetos, individuos, intervalos de espacio o tiempo sobre los que se experimenta.

Variable de interés o respuesta: es la variable que se desea estudiar y controlar su variabilidad.

Factor: son las variables independientes que pueden influir en la variabilidad de la variable de interés.

Factor tratamiento: es un factor del que interesa conocer su influencia en la respuesta.

Factor bloque: es un factor en el que no se está interesado en conocer su influencia en la respuesta pero se supone que ésta existe y se quiere controlar para disminuir la variabilidad residual.

Niveles: cada uno de los resultados de un factor. Según sean elegidos por el experimentador o elegidos al azar de una amplia población se denominan factores de efectos fijos o factores de efectos aleatorios.

Tratamiento: es una combinación específica de los niveles de los factores en estudio. Son, por tanto, las condiciones experimentales que se desean comparar en el experimento. En un diseño con un único factor son los distintos niveles del factor y en un diseño con varios factores son las distintas combinaciones de niveles de los factores.

Observación experimental: es cada medición de la variable respuesta.

Tamaño del Experimento: es el número total de observaciones recogidas en el diseño.

Interacción de factores: existe interacción entre dos factores F_i y F_j si el efecto de algún nivel de F_i cambia al cambiar de nivel en F_j. Esta

definición puede hacerse de forma simétrica y se puede generalizar a interacciones de orden tres o superior.

Ortogonalidad de factores: dos factores F_i y F_j con i y j niveles, respectivamente, son ortogonales si en cada nivel i de F_i el número de observaciones de los j niveles de F_j están en las mismas proporciones. Esta propiedad permite separar los efectos simples de los factores en estudio.

Diseño equilibrado o balanceado: es el diseño en el que todos los tratamientos son asignados a un número igual de unidades experimentales.

1.5. Principios básicos en el diseño de experimentos

Al planificar un experimento hay tres principios básicos que se deben tener siempre en cuenta:

- Replicación
- Aleatorización
- Control local

Los dos primeros (replicación y aleatorizar) son estrategias eficientes para asignar los tratamientos a las unidades experimentales sin preocuparse de qué tratamientos considerar. Por el contrario, la factorización del diseño define una estrategia eficiente para elegir los tratamientos sin considerar en absoluto como asignarlos después a las unidades experimentales.

Replicación: El proceso de repetir en condiciones similares el experimento para cada tratamiento se denomina replicación. Cuándo el número de replicaciones es igual para todos los tratamientos el diseño se denomina balanceado, en caso contrario se dice que es desbalanceado. Un número adecuado de replicaciones permite al experimentador obtener una estimación del error experimental. La replicación es la asignación del mismo tratamiento a mas unidades experimentales, o sea que hace referencia al número de unidades experimentales de cada tratamiento, no al número de observaciones. El propósito de la replica es proveer una estimación del error experimental. Se obtiene de comparar unidades experimentales tratadas igual pero que antes del experimento tenán la oportunidad de ser tratadas de manera diferente. Las múltiples mediciones

tomadas en una unidad experimental no satisfacen esta definición, dado que esto no es replicación; las repeticiones reducen la variación asociada con mediciones y/o errores muestrales, pero no proveen ninguna información relacionada con los errores experimentales.

Además de proveer una estimación de error experimental, las replicaciones aportan la precisión del experimento al reducir el error estándar asociado con la comparación de tratamientos. Esto se desprende del hecho que la varianza de la media disminuye inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de replicas. Esto provee una forma para controlar el tama no de la varianza del error.

A pesar de que el incremento en el número de replicaciones da precisión a las estimaciones, éstas no se pueden incrementar indefinidamente. Un punto para su disminución se alcanza cuando el incremento en los costos de la experimentación no es compensado con una reducción en la varianza. Cuando el número de replicas se torna demasiado grande, y las diferencias entre tratamientos detectadas son demasiado peque nas, la importancia práctica que resulta es una pérdida de recursos valiosos.

Las replicaciones también proveen formas para incrementar el rango de las condiciones estudiadas en el experimento. No hay requisitos para que las replicaciones sean adyacentes en tiempo o espacio, dado que cuando se usan conjuntamente con el control local se puede investigar un mejor rango de condiciones experimentadas.

Aleatorización: La aleatorización es fundamental para que el diseño de un experimento sea válido. Es el procedimiento que permite que cada unidad experimental tenga iguales condiciones para recibir cualquier tratamiento. Esto no significa que el experimentador podrá escribir como quiera la identificación de tratamientos (nombres o símbolos) en el orden que se le ocurra. La aleatorización es un proceso físico que asegura que cada tratamiento tenga igual probabilidad de ser asignado a cualquier unidad experimental. Este es el punto en el cual, el procedimiento experimental con las leyes de azar son explícitamente introducidas. De acuerdo con Brownlee (1957) una de las principales contribuciones que el estadístico puede hacer es insistir en la aleatorización del experimento.

La aleatorización es necesaria ya que provee las bases para obtener un test válido de significancia al destruir cualquier sistema de correlación que pueda existir entre las unidades experimentales. Un supuesto valido que resalta el análisis de varianza es que los errores experimentales son independientes. Es bien sabido que los errores asociados con las

unidades experimentales adyacentes en tiempo y/o espacio están correlacionados. Una correlación positiva entre las unidades experimentales va a tener una mayor varianza del tratamiento que si las observaciones fueran independientes. Consecuentemente la probabilidad del error tipo I será mayor que el valor preestablecido. Con una correlación negativa, los efectos son opuestos a aquellos con una correlación positiva. Con la asignación de tratamientos al azar con las unidades experimentales, posiblemente sujetas a las restricciones, el efecto de la correlación se disminuye entre las unidades experimentales. La aleatorización no hace que los errores sean independientes pero asegura que, en promedio, las correlaciones sean cero. Como resultado, los datos pueden ser analizados si el supuesto de independencia de los errores es verdadero.

Una segunda función de la aleatorización es la de proveer medios para evitar sesgos en la estimación del error experimental y los efectos de tratamiento. La estimación del error experimental se obtiene comparando las unidades experimentales tratadas de manera similar. Para que esta estimación sea válida, es necesario garantizar que las unidades experimentales tratadas de manera similar no sean diferenciables de manera relevante de las unidades experimentales tratadas de manera distinta. La forma de asegurar que la estimación del error sea válida se obtiene realizando una asignación aleatoria de los tratamientos.

La aleatorización también provee estimaciones insesgadas de los efectos de tratamiento al controlar los efectos de fuentes de variación desconocidas. Esto provee la seguridad de haber asignado adecuadamente estas fuentes de variación, las cuales deben ceñirse a normas donde el experimentador no tiene ni el tiempo ni el conocimiento para investigar, pero que de otra forma, podrían conducir a conclusiones erradas. Esta es la única forma de asegurar que la comparación entre tratamientos no sean sesgadas por un tratamiento que fue asignado de manera premeditada, para hacer "mejores.º "peores.ªlgunas unidades experimentales. La aleatorización romperá cualquier patrón asociado con factores desconocidos de tal forma que ningún tratamiento será favorecido frente a los demás. La aleatorización nunca elimina la variación causada por factores extraños desconocidos, pero distribuye sus efectos en promedio, equitativamente sobre todos esos factores extra nos.

Finalmente, la aleatorización es necesaria para abolir los sesgos personales, conscientes e inconscientes, de las personas que intervienen en el experimento, incluyendo al experimentador. La historia cuenta con un gran número de experimentos en Inglaterra sobre efectos de

comida suplementaria para colegios de ni nos de distritos pobres que fueron inválidos porque la selección de los niños fue dejada en manos de los profesores. parece ser que se le asignó el mejor suplemento a los niños más desnutridos. Hay un problema que aparece al aplicar la aleatorización cuando el número de unidades experimentales es muy peque no. En estos casos es posible que los arreglos producidos por la aleatorización aparezcan al experimentador como bien, deseables o inaceptables. Por ejemplo, la secuencia:

$$AAABBBCCC$$

es apenas una forma de las 1670 secuencias posibles de tres tratamientos con tres replicas en el tiempo. Este patrón sin embargo, probablemente no será aceptado por la mayoría de experimentos. Tal relación sugiere, una falta de conocimiento por parte del experimentador. Youden (1964) sugiere tres formas para manejar esta dificultad, todas ellas, colocando restricciones a la aleatorización:

1. Incorporar al dise no de experimentos la condición que hace el arreglo inaceptable, esta sería la mejor forma para manejar el problema. Tal vez no sea práctico o deseable, sin embargo, para introducir estas futuras restricciones al dise no puede ocurrir que:
   a) Pierde grados de libertad en la etimación del error experimental debido a la eliminación de la otra fuente de variación que puede no estar completamente compensada.
   b) El experimento se vuelve más complicado o
   c) Que se hayan usado hasta ahora distintos sistemas de agrupación
2. Rechazar arreglos extremos cuando ellos ocurran y re-aleatorizar: el mayor problema aquí, será el de determinar subjetivamente lo que es un arreglo extremo. Si esto se puede hacer, entonces esta será una solución más razonable
3. Seleccionar un diseño al azar de un grupo predeterminado de arreglos aceptables

Control local: Al proceso de clasificación de las unidades experimentales en grupos homogéneos, se le denomina Control Local.

Una función primaria del diseño de experimentos es el de reducir el control "exacto"del ambiente experimental debido a que tal control es un hecho costoso y tedioso, y presume que todos los factores que

influyen han sido identificados. La función principal del control local es la de eliminar los efectos de fuentes conocidas de variación extrema.

El control se acompaña del bloqueo de las unidades experimentales. El bloqueo es un arreglo de unidades experimentales en grupos más homogéneos, basados en características comunes, de los factores de clasificación. Los tratamientos se asignan a las unidades experimentales, basados en la estructura de bloques, así, el uso de control local coloca algunas restricciones en la aleatorización de tratamiento a las unidades experimentales. Para alcanzar la máxima eficiencia con el bloqueo, es necesario el conocimiento relacionado con varios factores extra nos que afectan las unidades experimentales, información que solo el experimentador puede proveer.

El bloqueo a las unidades experimentales se debe hacer de tal manera que se asocien a fuentes asociadas de variación extrema con diferencias entre bloques, en este caso se debe cumplir que:

1. Una estimación más precisa del error experimental debe ser obtenida, puesto que la contribución de estos factores, extra nos se eliminan, introduciendo además e¯ciencia al experimento debido a que se podrán detectar menores diferencias entre los tratamientos y
2. Las comparaciones de tratamiento no serán sesgadas por diferencias en las unidades experimentales debido a los factores externos.

La aplicación de control local (bloqueo) no remueve el requisito de aleatorización, solo impone restricciones al tope de aleatorización que se llevará a cabo. Para todos los dise nos, la asignación aleatoria de tratamientos a las unidades experimentales dentro de los límites impuestos por el control local es esencial para poder tener así, una interpretación válida de los resultados.

La relación de los tres principios básicos de un buen dise no de experimentos es la clave de la estructura que provee una estimación del error experimental y a través de la aleatorización, se asegura la validéz de las estimaciones y de las pruebas de significancia.

1.6. Algunos diseños experimentales clásicos

Un diseño experimental es una regla que determina la asignación de las unidades experimentales a los tratamientos. Aunque los experimentos difieren unos de otros en muchos aspectos, existen diseños estándar que se utilizan con mucha frecuencia. Algunos de los más utilizados son los siguientes:

Diseño completamente aleatorizado: el experimentador asigna las unidades experimentales a los tratamientos al azar. La única restricción es el número de observaciones que se toman en cada tratamiento. De hecho si n_i es el número de observaciones en el i-ésimo tratamiento, $i = 1, \cdots, k$, entonces, los valores $n_1, n_2, ..., n_k$ determinan por completo las propiedades estadísticas del diseño. Naturalmente, este tipo de diseño se utiliza en experimentos que no incluyen factores bloque. El modelo matemático de este diseño tiene la forma:

$$Y = \alpha + \mu_i + \xi$$

Diseño en bloques o con un factor bloque: en este diseño el experimentador agrupa las unidades experimentales en bloques, a continuación determina la distribución de los tratamientos en cada bloque y, por último, asigna al azar las unidades experimentales a los tratamientos dentro de cada bloque.

En el análisis estadístico de un diseño en bloques, éstos se tratan como los niveles de un único factor de bloqueo, aunque en realidad puedan venir definidos por la combinación de niveles de más de un factor nuisance. El modelo matemático de este diseño es:

$$Y = \alpha + \mu_i + \beta_j + \xi$$

El diseño en bloques más simple es el denominado diseño en bloques completos, en el que cada tratamiento se observa el mismo número de veces en cada bloque.

El diseño en bloques completos con una única observación por cada tratamiento se denomina diseño en bloques completamente aleatorizado o, simplemente, diseño en bloques aleatorizado.

Cuando el tamaño del bloque es inferior al número de tratamientos no es posible observar la totalidad de tratamientos en cada bloque y se habla entonces de diseño en bloques incompletos.

Diseños con dos o más factores bloque: en ocasiones hay dos (o más) fuentes de variación lo suficientemente importantes como para ser designadas factores de bloqueo. En tal caso, ambos factores bloque pueden ser cruzados o anidados.

Los factores bloque están cruzados cuando existen unidades experimentales en todas las combinaciones posibles de los niveles de los factores bloques.

Diseño con factores bloque cruzados: también denominado diseño fila-columna, se caracteriza porque existen unidades experimentales en todas las celdas (intersecciones de fila y columna).

El modelo matemático de este diseño es:

$$yij = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \xi$$

Los factores bloque están anidados si cada nivel particular de uno de los factores bloque ocurre en un único nivel del otro factor bloque.

Diseño con factores bloque anidados o jerarquizados: dos factores bloque se dicen anidados cuando observaciones pertenecientes a dos niveles distintos de un factor bloque están automáticamente en dos niveles distintos del segundo factor bloque.

En la tabla 1.2 puede observarse la diferencia entre ambos tipos de bloqueo.

		Bloques Cruzados		
		Bloque 1		
		1	2	3
Bloque 2	1	*	*	*
	2	*	*	*
	3	*	*	*

		Bloques Anidados		
		Bloque 1		
		1	2	3
Bloque 2	1	*		
	2	*		
	3	*		
	4		*	
	5		*	
	6		*	
	7			*
	8			*
	9			*

Tabla 1.2: Plan esquemático de experimentos con dos factores bloque

Diseños con dos o más factores: en algunas ocasiones se está interesado en estudiar la influencia de dos (o más) factores tratamiento, para ello se hace un diseño de filas por columnas. En este modelo es importante estudiar la posible interacción entre los dos factores. Si en cada casilla se tiene una única observación no es posible estudiar la interacción entre los dos factores, para hacerlo hay que replicar el modelo, esto es, obtener k observaciones en cada casilla, donde k es el número de réplicas.

El modelo matemático de este diseño es:

$$Y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \xi_{ijkl}$$

Generalizar los diseños completos a más de dos factores es relativamente sencillo desde un punto de vista matemático, pero en su aspecto práctico tiene el inconveniente de que al aumentar el número de factores aumenta muy rápidamente el número de observaciones necesario para estimar el modelo. En la práctica es muy raro utilizar diseños completos con más de 4 factores.

Un camino alternativo es utilizar fracciones factoriales que son diseños en los que se supone que muchas de las interacciones son nulas, esto permite estudiar el efecto de un número elevado de factores con un número relativamente pequeño de pruebas. Por ejemplo, el diseño en cuadrado latino, en el que se supone que todas las interacciones son nulas, permite estudiar tres factores de k niveles con solo k^2 observaciones. Si se utilizase el diseño equilibrado completo se necesitan k^3 observaciones.

Diseños factoriales a dos o más niveles: en el estudio sobre la mejora de procesos industriales (control de calidad) es usual trabajar en problemas en los que hay muchos factores que pueden influir en la variable de interés. La utilización de experimentos completos en estos problemas tiene el gran inconveniente de necesitar un número elevado de observaciones, además puede ser una estrategia ineficaz porque, por lo general, muchos de los factores en estudio no son influyentes y mucha información recogida no es relevante. En este caso una estrategia mejor es utilizar una técnica secuencial donde se comienza por trabajar con unos pocos factores y según los resultados que se obtienen se eligen los factores a estudiar en la segunda etapa.

Los diseños factoriales 2^k: son diseños en los que se trabaja con k factores, todos ellos con dos niveles (se suelen denotar + y -). Estos diseños son adecuados para tratar el tipo de problemas descritos porque permiten trabajar con un número elevado de factores y son válidos para estrategias secuenciales.

Si k es grande, el número de observaciones que necesita un diseño factorial 2^k es muy grande ($n = 2^k$). Por este motivo, las fracciones factoriales 2^{k-p} son muy utilizadas, éstas son diseños con k factores a dos niveles, que mantienen la propiedad de ortogonalidad de los factores y donde se suponen nulas las interacciones de orden alto (se confunden

con los efectos simples) por lo que para su estudio solo se necesitan 2^{k-p} observaciones (cuanto mayor sea p menor número de observaciones se necesita pero mayor confusión de efectos se supone).

En los últimos años Taguchi ha propuesto la utilización de fracciones factoriales con factores a tres niveles en problemas de control de calidad industrial.

Análisis de covarianza: el Análisis de Covarianza consiste básicamente en elegir una o más variables adicionales o covariables que estén relacionadas con la variable de respuesta, evitando que los promedios de tratamientos se confundan con los de las covariables, incrementando de esa manera la precisión del experimento. Por ejemplo: número de plantas por unidad experimental, pesos iniciales en animales, grado de infestación de garrapatas, días de lactancia o edad de destete, etc.; pueden ser covariables que influyan en el resultado final y cuyo efecto de regresión sobre la variable respuesta el investigador desea eliminar, ajustando las medias de tratamientos a una media común de X. En este análisis se asume que la variable dependiente Y está asociada en forma lineal con la variable independiente X, existiendo homogeneidad de pendientes.

Capítulo 2

Diseños experimentales con un solo factor

2.1. Preliminares

Los diseños unifactoriles completamente aleatorizados son los modelos más sencillos del diseño de experimentos, en el cual una variable respuesta puede depender de la influencia de un único factor, de forma que el resto de las causas de variación se engloban en el error experimental. Al describir una variable Y mediante su media y varianza, lleva a pensar que el valor de la variable se puede expresar mediante un modelo lineal de la forma:

$$Y_i = \mu + \varepsilon_i$$

donde :

$$\begin{aligned} \mu &: \text{es la media poblacional} \\ \varepsilon &: \text{el error o residuo lineal} \end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, de modo que:

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= E(\mu + \varepsilon_i) = \mu \\ Var(Y_i) &= Var(\mu + \varepsilon_i) = Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Los modelos de deseños de experimentos de un factor consideran a la población de todos los resultados posibles bajo cada tratamiento, como subpoblaciones de una población general de todos los resultados posibles. De modo que la observación i bajo el tratamiento j se puede expresar como:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}$$

es decir, se considera la suma de la media poblacional más el efecto del tratamiento j, definido como $\tau_j = \mu_j - \mu$, de manera tal que $\sum_{j=1}^{k} \tau_j = 0$, más un desvío respecto de su media. A éste último término se le conoce como error lineal del modelo, y engloba todos los factores que no han sido considerados en el modelo, y por tanto no intervienen en la predicción.

Los supuestos teóricos en los cuales se basa el modelo son:

Aditividad del modelo: en caso de no cumplirse el supuesto de que los tratamientos adicionan una cantidad constante τ_j a cada observación, sino que por ejemplo adicionan un porcentaje, las técnicas de análisis que se desarrollarán en este capítulo, no tienen validez cuando sea empleado.

Distribución de los errores: los errores son aleatorios, acorde con la adjudicación aleatoria de los individuos, independientes, cuando el error que afecta a una observación no afecta a las demás observaciones; con media cero, es decir que se anulan en promedio, y varianza común, para los tratamientos; esta condición se expresa como

$$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2)$$

Los datos asociados a un diseño unifactorial se resumen en una tabla de la forma:

	Niveles						
Observaciones	1	2	3	$\cdots$	k	Total	Promedio
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	$\cdots$	Y_{1k}	$Y_{1.}$	$\overline{Y}_{1.}$
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	$\cdots$	Y_{2k}	$Y_{2.}$	$\overline{Y}_{2.}$
3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	$\cdots$	Y_{3k}	$Y_{3.}$	$\overline{Y}_{3.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		
n	Y_{n1}	Y_{n2}	Y_{n3}	$\cdots$	Y_{nk}	$Y_{n.}$	$\overline{Y}_{n.}$
	$Y_{.1}$	$Y_{.2}$	$Y_{.3}$	$\cdots$	$Y_{.a}$	$Y_{..}$	$\overline{Y}_{..}$

Tabla 2.1:

Donde:

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^{k} Y_{ij} \quad Y_{.j} = \sum_{i=1}^{k} Y_{ij} \quad \overline{Y}_{i.} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} Y_{ij}$$

$$\overline{Y}_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{ij} \quad Y_{..} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{ij} \quad \overline{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{nk}$$

El modelo postula la existencia de parámetroa que necesitan ser estimados. El método de estimación usado en estos casos es el de mínimos cuadrados, que propone como estimador al valor que minimiza la suma de cuadrados del error. Es claro que, el valor esperado de Y_{ij}, la i-ésima observación en el tratamiento j-ésimo, es:

$$E(Y_{ij}) = \mu + \tau_j$$

La estimación de estos parámetros proporciona una estimación de las medias condicionales de cada tratamiento:

$$\widehat{Y}_{ij} = \mu - \widehat{\tau}_{ij} = \widehat{E}[Y_{ij}]$$

La diferencia $Y_{ij} - \widehat{Y}_{ij} = e_{ij}$ constituye el error de estimación o error experimental, cuya suma de cuadrados se desea minimizar. Desarrollando en detalles la suma de cuadrados se tiene:

$$\begin{aligned} SCE = \sum_i \sum_j e_{ij}^2 &= \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \widehat{Y}_{ij})^2 \\ &= \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \mu - \tau_j)^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

derivando parcialmente la ecuación 2.1 respecto a cada parámetro e igualando a cero, se obtienen los estimadores deseados:

$$\frac{\partial SCE}{\partial \tau_j} = -2 \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \mu - \tau_j)$$

así,

$$\sum_i \sum_j Y_{ij} - nk\mu - n \sum_j \tau_j = 0$$

bajo el supuestos $\sum_j \tau_j = 0$, entonces

$$\sum_i \sum_j Y_{ij} - nk\mu = 0$$

es decir

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{nk} \sum_i \sum_j Y_{ij} = \overline{Y}_{\cdot\cdot} \tag{2.2}$$

Por otra parte

$$\frac{\partial SCE}{\partial \tau_r} = -2 \sum_i (Y_{ir} - \mu - \tau_r)$$

así,

$$\sum_i (Y_{ir} - \mu - \tau_r) = 0$$

es decir,

$$\sum_i Y_{ir} = n\mu + n\tau_r$$

usando la ecuación 2.2, se tiene que:

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}_r &= \frac{1}{n}\sum_i Y_{ir} + \frac{1}{k}\sum_i \sum_j Y_{ij} \\ &= \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si se asume que los errores siguen una distribución normal, entonces cada

$$\overline{Y}_{i.} \sim N\Big(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n}\Big)$$

De este modo, cuando σ es desconocida un intervalo de confianza al $100(1-\alpha)\,\%$ es

$$\left[\overline{Y}_{i.} \pm t_{\frac{\alpha}{2},N-a}\sqrt{\frac{MC_E}{n}}\right]$$

De manera similar:

$$\left[\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..} \pm t_{\frac{\alpha}{2},N-a}\sqrt{\frac{2MC_E}{n}}\right]$$

2.2. Análisis de la varianza

En términos generales, los métodos relacionados con problemas de análisis de la varianza, son un conjunto de técnicas estadísticas, que permiten analizar el efecto de los niveles de diversos factores (variable independiente) sobre una característica, medida a través de una o más variables cuantitativas conocidas como dependientes.

Los distintos métodos surgen como extensiones de las pruebas t de Student para dos muestras (independientes o relacionadas); como es bien sabido, la prueba t de Student para dos muestras independientes se aplica para comparar las observaciones de una variable dependiente, cuantitativa, en los dos grupos establecidos por una variable independiente, cualitativa o categórica; si el número de grupos es mayor que dos y los grupos se obtienen de la

combinación de los niveles de diversas variables independientes, la alternativa adecuada a la prueba t para dos muestras independientes es el análisis factorial de la varianza.

En particular, si, los grupos proceden de los niveles de una única variable independiente, ante nosotros está presente un diseño experimental en el cual es aplicable el análisis de la varianza de un factor. En ocasiones, los posibles resultados del fenómeno de análisis no pueden ser obtenidos mediante la observación de una sola variable, sino mediante la observación simultanea de un conjunto de variables; en este caso, y como una extensión del método de análisis univariado, la prueba adecuada sería el análisis de la varianza multivariante, en el cual intervienen dos o más variables dependientes.

El análisis de la varianza como modelo estadístico se basa en los supuestos:

1. Las k poblaciones o grupos están normalmente distribuidos.
2. La varianza entre los grupos es constante
3. Las observaciones son independientes entre si.

La técnica del análisis de la varianza consiste en separar la variación de un conjunto de datos en partes atribuibles a diferentes causas o fuentes de variación, de acuerdo a un modelo postulado y luego compararlas.

De acuerdo al modelo, cada observación se expresa como una suma de la forma:

$$Y_{ij} = \overline{Y}_{..} + \widehat{\tau}_j + \varepsilon_{ij}$$

de modo que elevando al cuadrado cada término y sumando para los nk valores

$$\sum_i \sum_j Y_{ij}^2 = nk\overline{Y}_{..}^2 + n\sum_j \widehat{\tau}_j^2 + \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2$$

como $\sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - nk\overline{Y}_{..}^2 = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2$, restando $nk\overline{Y}_{..}^2$ a ambos miembros tenemos:

$$\sum_i \sum_j (Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2 = n\sum_j \widehat{\tau}_j^2 + \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2$$

lo que se puede simbolizar como:

$$SC_T = SC_W + SC_E$$

La suma de cuadrados de los tratamientos SC_W mide la variación entre la medias de los tratamientos con $k-1$ grados de libertad; la suma de cuadrados del error SC_E, mide la variación interna de las medias con $k(n-1)$

grados de libertad; de modo que los grados de libertad quedaron divididos en correspondencia con las sumas de cuadrados. A los efectos de independizarse del número de observaciones se puede dividir la suma de cuadrados por sus grados de libertad, obteniéndose un cuadrado medio de los residuos.

$$CM_W = \frac{SC_W}{k-1}, \quad CM_E = \frac{SC_E}{k(n-1)}$$

El objetivo del análisis de la varianza es el contraste de hipótesis definido como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \tau_j = 0 \ \ \forall j \\ H_1 &: \ \text{al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

que equivale a

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \\ H_1 &: \ \text{al menos uno distinto} \end{aligned}$$

Bajo H_0 las medias cuadráticas constituyen estimadores de la misma varianza poblacional. En efecto

$$\sigma^2_{\overline{Y}} = \frac{\sigma^2_Y}{n}, \quad CM_W = \frac{SC_W}{k-1} = n\sigma^2_t$$

es un estimador de la varianza por tratamientos, o sea a través de las medias de los tratamientos. Mientras que:

$$CM_E = \frac{SC_E}{n(k-1)} = \sigma^2_e$$

constituye una estimación de la varianza de la población promediada de k estimaciones y se le conoce como estimación de la varianza poblacional a través del error. Mientras que la estimación lograda a través de las medias es sesgada, si existe un efecto de tratamientos; su esperanza es $\sigma^2 + \frac{n}{k-1}\sum_j \tau_j^2$; la estimación a través de las varianzas internas es insesgada.

Debido a que son estimadores de la varianza poblacional independientes, entonces bajo H_0

$$CM_T \sim \chi^2_{k-1} \quad CM_E \sim \chi^2_{k(n-1)}$$

y

$$F_{obser} = \frac{CM_W}{CM_E} \sim F_{k-1,k(n-1)}$$

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	test F	P-valor
Entregrupos	SS_B	$k-1$	CM_T		
Intragrupos	SS_W	$N-k$	CM_E	$F=\frac{CM_T}{CM_E}$	p
Total	SS_T	$N-1$			

Tabla 2.2: Tabla de análisis de la varianza

define el estadístico de prueba, para el contraste de hipótesis de igualdad de las medias en los k tratamientos del factor. Estos resultados se expresan generalmente en una tabla de ANOVA de la forma:

donde

$$p = Pr(F \geq F_{obser})$$

es el $p - valor$ del contraste de hipótesis, que permite definir la regla de decisión para el contraste como:

- Aceptar H_0 cuando $F_{obser} \leq F_{\alpha,k-1,N-k}$, equivalente en términos del $p - valor$, a aceptar H_0 si $p - valor \geq \alpha$.
- Rechazar H_0 cuando $F_{obser} > F_{\alpha,k-1,N-k}$, equivalente en términos del $p - valor$, a no aceptar H_0 si $p - valor < \alpha$

La región crítica asociada al estadístico de prueba en el análisis de la varianza se ilustra acontinuación.

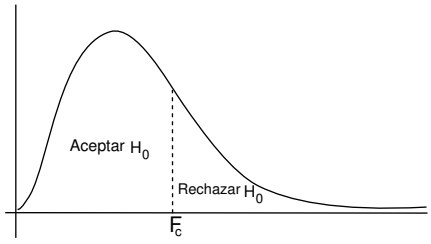

Figura 2.1: Región crítica

Para simplificar cálculos manuales, se pueden utilizar las identidades:

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{nk} \quad SS_{Tratamientos} = n\sum_{j=1}^{k} \overline{Y}_{.j}^2 - \frac{Y_{..}^2}{nk}$$

$$SS_{Error} = SS_{Total} - SS_{Tratamiento}$$

2.3. Modelos de efectos fijos

Cuando el investigador posee información relacionada con la población de niveles compuesta por los elegidos en el estudio, por lo cual los resultados sólo se pueden aplicar a ellos, es decir, los niveles del factor se han elegido de forma deterministica, basándose en datos históricos, o cuando se tiene conocimiento e intrés en la totalidad de los posibles niveles del factor, se dice que el diseño unifactorial es de *efectos fijos*. Sea Y la variable respuesta que deseamos analizar. Se pueden resolver dos tipos de problemas:

1. Consideramos k poblaciones diferentes y comparamos la respuesta a un tratamiento, o único nivel de un factor. En la población i-ésima $(i = 1, \cdots, k)$ se toman n_i observaciones. La respuesta se cuantifica mediante y_{ij} , donde $i = 1, \cdots, k$ se refiere a la población en estudio y $j = 1, \cdots, n_i$ se refiere a la observación j -ésima.

2. Consideramos ahora un factor con k niveles, es decir, en total k tratamientos, y una única población. Se observa la respuesta y_{ij} del tratamiento i-ésimo a n_i observaciones de la población.

En cualquiera de los dos casos el modelo se puede expresar como:

$$Y_{ik} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

donde $i = 1, \cdots, k$; $j = 1, \cdots, n_i$ y $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$, siendo μ_i el valor medio de Y, la variable respuesta, en la población o nivel i-ésimo, y ε_{ij} es el error aleatorio que incluye a todos los factores que influyen en la respuesta y no están incluidos en el modelo. Alternativamente, se puede expresar de esta manera:

$$Y_{ik} = \mu + \tau i + \varepsilon_{ij}$$

donde $i = 1, \cdots, a$; $j = 1, \cdots, n$, suponiendo grupos de igual tamaño.

De este modo

Y_{ij}**:** es la observación del individuo j en la el nivel i del factor considerado.

μ**:** es la media global de la variable Y sobre la población.

τ_i**:** es el efecto del i-ésimo tratamiento del factor sobre la respuesta.

ε_{ij}**:** es el error o residuo aleatorio del modelo lineal, satisface $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$; independientes entre sí.

Se supone, además, que las unidades experimentales están en un ambiente uniforme, lo cual lleva a un diseño completamente aleatorizado. En el modelo de efectos fijos, los efectos de los tratamientos τ_i se definen como desviaciones respecto a la media general, por lo que

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\tau_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n\tau_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}\tau_i \quad = \quad 0$$

La esperanza del tratamiento i es

$$E(Y_{ij}) = \mu + \tau_i$$

donde $i = 1, \cdots, k$. De este modo es igual al término de la media general más el efecto del tratamiento i.

El problema que se trata de analizar es:

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \\ H_1 &: \ \text{al menos uno distinto} \end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k = 0 \\ H_1 &: \ \text{al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

El estadístico de prueba se define como:

$$F = \frac{CM_W}{CM_E} \sim F_{k-1,k(n-1)}$$

usando el $p - valor$ reportado en la tabla ANOVA 2.2; la regla de decisión es:

- Aceptar H_0 si $p - valor \geq \alpha$
- Rechazar H_0 si $p - valor < \alpha$

Método	Cigarrillos									
1	57	52	52	59	53	49	55	52	54	57
2	47	50	54	54	51	52	56	48	53	49
3	55	57	50	51	57	53	51	59	53	55

Tabla 2.3: Cigarrillos dejados de fumar

Ejemplo 2.1 *Para determinar la eficiencia de tres métodos para dejar de fumar, un investigador clínico realizó un ensayo, seleccionando al azar 30 fumadores, distribuidos al azar para la aplicación de los métodos a fumadores con características similares. El número de cigarrillos que cada fumador dejó de fumar diariamente se resume en la tabla 2.3. Determine cual de los tres métodos es más efectivo para dejar de fumar.*

El diseño considerado es un ANOVA de un factor con efectos fijos, el factor presenta tres niveles, uno asociado a cada método en consideración. Los promedios de cigarrillos dejados de fumar al aplicar cada método fueron:

$$\overline{Y}_{\cdot 1} = 54{,}0 \quad \overline{Y}_{\cdot 2} = 51{,}4 \quad \overline{Y}_{\cdot 3} = 54{,}1$$

mientras que el promedio total de la muestra sin considerar métodos es $\overline{Y}_{\cdot\cdot} = 53{,}17$, además

$$\sum_i \sum_j Y_{ij} = 1595 \quad \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 = 85087$$
$$\sum_j \overline{Y}_{\cdot j}^2 = 8484{,}77 \quad \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{nk} = 84800{,}833$$

luego las sumas de cuadrados son:

$$\begin{aligned} SS_{Total} &= 85087 - 84800{,}833 = 286{,}167 \\ SS_{Tratamientos} &= 10 * 8484{,}77 - 84800{,}833 = 46{,}867 \\ SS_{Error} &= 286{,}167 - 46{,}867 = 239{,}300 \end{aligned}$$

la información completa del diseño se resume en la tabla de ANOVA

Por otra parte se sabe que $F = \frac{MC_{Tratamiento}}{MC_{Error}} \sim F_{2,27}$, luego para $\alpha = 1\,\%$, el valor crítico es $F_{crit} = 5{,}49$, entonces como $2{,}644 = F_{observado} < F_{Crit} = 5{,}49$, se acepta la hipótesis nula de igualdad de los efectos de los tres métodos; en conclusion el resultado arrojado por los tres métodos empleados para dejar de fumer es el mismo en promedios al nivel de significancia del $1\,\%$, cualquier diferencia es producto del azar

Fuentes	Sumas de cuadrados	G.L	Medias cuadráticas	F
Tratamientos	46.867	2	23.433	
Error	239.300	27	8.863	2.644
Total	286.167	29		

Tabla 2.4: ANOVA ejemplo 1

2.4. Comparaciones entre medias

Al rechazar la hipótesis nula en la prueba de igualdad de las medias en los grupos definidos por el factor, no existe elementos de juicio para conocer entre cual o cuales grupos se alcanza tal diferencia. Así, una vez obtenidas diferencias significativas entre los tratamientos, conviene estudiar por qué se rechaza la igualdad entre medias, comparando todos los pares de medias, porque puede ser que se rechace la igualdad de medias cuando haya sólo un par de medias diferentes entre sí. Se considera, entonces, los siguientes contrastes:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_i = \mu_j \\ & \qquad\qquad i \neq j \\ H_1 &: \mu_i \neq \mu_j \end{aligned}$$

Este tipo de contraste realizado después de rechazar la hipótesis nula de la prueba de ANOVA, son conocidas como pruebas *post hoc.* y están clasificadas como: pruebas de comparaciones múltiples y los tests de recorrido estudentizado.

Un problema común al que nos podemos enfrentar en cualquier investigación es querer comparar más de 2 grupos de datos para detectar posibles diferencias entre ellos. La utilización de modelos de ANOVA puede permitirnos detectar diferencias, a nivel global, entre las medias involucradas, pero en muchas ocasiones deseamos trabajar a un mayor detalle y detectar las diferencias entre grupos concretos lo que sólo es posible mediante el uso de los Procedimientos de Comparaciones múltiples

Las pruebas de comparaciones múltiples se agrupan sedún la distribución estadística que utilizan en su cálculo:

Basadas en la distribución t: estas pruebas utilizan como contraste de prueba estadísticos basados en la distribución t de student, las pruebas más importantes de este grupo son: Dunn-Bonferroni (Dunn, 1961) Dunn-Sidak (Dunn, 1958 y Sidák, 1967) Holm-Shaffer (Holm, 1979 y Shaffer, 1986)

Basadas en la distribución del Rango Estudentizado: utilizan como estadísticos de prueba la distribución de rango estudentizado, esta distribución se define de la siguiente manera: sean $Z_1, \cdots, Z_a \sim N(0,1)$, $U \sim \chi^2_m$ independientes, entonces

$$Q = \max_{i \neq j} \frac{Z_i - Zj}{\sqrt{\frac{U}{m}}} = \frac{Z_{(a)} - Z_{(1)}}{\sqrt{\frac{U}{m}}} \sim q_{a,m}$$

se distribuye con una distribución de recorrido estudentizado de parámetros a, m. Las pruebas de comparaciones múltiples más importantes son: Tukey (Tukey, 1953), Newman-Keuls (Newman, 1932 y Keuls 1952), Duncan (Duncan, 1955), Ryan (Ryan, 1960; Einot y Gabriel , 1975) Peritz (Peritz, 1970).

Basadas en la distribución F: el estadístico de prueba se basa en la distribución F, las más importantes son: Scheffé (Scheffé, 1953, 1959) F de Newman-Keuls (Newman, 1932 y Keuls 1952), F de Ryan.

Basadas en una prueba t protegida: se basan en correcciones de la distribución t de student mediante un factor de la forma:

$$t_{\frac{\alpha}{2}, N-k} \sqrt{MC_E \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}$$

las pruebas más importantes de este grupo son: LSD de Fisher (Fisher, 1935), Shaffer-Ryan (Shaffer, 1979), Fisher-Hayter (Hayter, 1986).

Basadas en la comparación con un control: en ocasiones uno de los tratamientos a comparar es el llamado *Tratamiento control* y el interés es comparar los $k-1$ tratamientos restantes con dicho control. En muchos casos el tratamiento control se refiere a la ausencia del ensayo. La prueba más importante de este grupos es la prueba de Dunnet (Dunnett, 1955).

2.4.1. Prueba de Fisher

El interés actual del investigador es determinar cuáles medias poblacionales difieren después de haber rechazado la hipótesis nula en el ANOVA. R. Fisher(1949) desarrolló un procedimiento para efectuar comparaciones dos a dos en un conjunto de k medias poblacionales conocido como *Prueba de mínimas diferencias significativas de Fisher*, el cual se puede resumir como:

1. Se parte del ANOVA de un factor:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \\ H_1 &: \text{ al menos una distinta} \end{aligned}$$

2. Si el $p - valor \geq \alpha$ se acepta H_0

3. Si el $p - valor < \alpha$ no se acepta H_0, y es necesario aplicar el test de mínimas diferencias significativas, para establecer entre que pares de medias existen diferencias.

4. Para un α fijo, la mínima diferencia significativa entre μ_i y μ_j con $i \neq j$ se define como:

$$LSD = t_{\frac{\alpha}{2},l}\sqrt{MC_E\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}$$

donde:

n_i, n_j**:** son los tamaños de las muestras poblacionales, i, j respectivamente.

$t_{\frac{\alpha}{2},l}$**:** es el cuantil $\frac{\alpha}{2}$ de la distribución t de student con l grados de libertad

l**:** son los grados de libertad de la media cuadrática del error MC_E

Para el contraste de hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_i = \mu_j \qquad\qquad i \neq j \\ H_1 &: \mu_i \neq \mu_j \end{aligned}$$

la regla de decisión se expresa como:

- Aceptar H_0 si $|\overline{y}_i - \overline{y}_j| \geq LSD$, en términos del $p - valor$ se acepta H_0 si $p - valor \geq \alpha$.
- No aceptar H_0 si $|\overline{y}_i - \overline{y}_j| < LSD$, en términos del $p - valor$, no se acepta H_0 si $p - valor < \alpha$.

2.4.2. Prueba de Tukey

Un método más conservador para comparar pares de medias de tratamientos es la prueba de Tukey, que consiste en comparar las diferencias entre las medias muestrales con el valor crítico definido mediante:

$$T_\alpha = q_\alpha(k, N-k)S_{\overline{Y}_{i.}}$$

Donde:

$S_{\overline{Y}_{i.}}$**:** es el error típico de estimación de la media cuadrática del error, definido como:

$$S_{\overline{Y}_{i.}} = \sqrt{\frac{MC_E}{n}}$$

n**:** es el número de observaciones por cada tratamiento

k**:** es el número de tratamientos o niveles del factor

Tukey en 1953 propuso una prueba de comparaciones múltiples de medias poblacionales, basada en la distribución de rangos estudentizado. El estadístico de prueba está prueba está definido por:

$$q_{ij} = q_{\alpha,k,v}\sqrt{MC_{Error}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

donde:

k	:	número grupos
v	:	grados de libertad de la media cuadrática intragrupos
MC_{Error}	:	media cuadrática intragrupos
n_k	:	número de observaciones en el grupo k
$q_{\alpha,k,v}$	:	valor crítico de la cola superior de los rangos estudentizado

Considere $T_{ij} = |\overline{y}_i - \overline{y}_j|$. Para decidir si la diferencia de los pares de medias es significativa o no, se realizará el contraste de hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_i = \mu_j \\ & \qquad\qquad i \neq j \\ H_1 &: \mu_i \neq \mu_j \end{aligned}$$

la regla de decisión es:

- Si $T_{ij} \geq q_{ij}$ se acepta la existencia de diferencias significativas entre las medias μ_i y μ_j
- Si $T_{ij} < q_{ij}$ no se acepta la existencia de diferencias significativas entre las medias μ_i y μ_j

Lo cual es equivalente a:

- Si $p - valor \geq \alpha$ se acepta la existencia de diferencias significativas entre las medias μ_i y μ_j
- Si $p - valor < \alpha$ se no acepta la existencia de diferencias significativas entre las medias μ_i y μ_j

2.4.3. Prueba de Duncan

Duncan en 1955 desarrollo una prueba de comparaciones múltiples para obtener todos los posibles pares de comparaciones utilizando k medias poblacionales, haciendo uso de las distribución de rangos estudentizados.

Para algunos conocedores del tema de las pruebas de comparaciones múltiples, la prueba de Duncan posee alta potencia para detectar diferencias significativas, por esta razón ha sido de gran utilidad y aplicación por parte de los investigadores.

Formulado el contraste de hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_i = \mu_j \\ & \qquad\qquad i \neq j \\ H_1 &: \mu_i \neq \mu_j \end{aligned}$$

Para aplicar la prueba de Duncan, si las k muestras son de igual tamaño, se ordenan las medias muestrales en orden ascendente $\overline{y}_{(1)} \leq \overline{y}_{(2)} \leq \cdots \leq \overline{y}_{(k)}$ y el error estándar de cada promedio se define como;

$$S_{\overline{y}_{i.}} = \sqrt{\frac{CM_E}{n}}$$

Si al menos una muestra posee tamaño distinto, se reemplaza n por la media armónica de los tamaños:

$$n = \frac{k}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}}$$

Usando los rangos significativos de Duncan $r_\alpha(p, l)$, para α fijos, $p = 2, 3, 4, \cdots, k$ y l los grados de libertad para la suma de cuadrados del error. Con estos $k - 1$ valores se obtiene los rangos de significancia mínima de Duncan

$$R_p = r_\alpha(p, l) S_{\overline{y}_{i.}}$$

Ahora se comparan el valor absoluto de las diferencias de las medias con los R_p, aceptar H_0, si

$$|\overline{y}_i - \overline{y}_j| \geq R_p$$

2.4.4. Prueba de Dunnett

El *tratamiento control* es un elemento necesario para evaluar el efecto de los tratamientos experimentales, existen diferentes razones por las cuales el tratamiento control es necesaria y útil. Un *control* al que no se le aplican

tratamientos revelará las condiciones en que se realizó el experimento. Así, es interesante determinar si las respuestas medias de los tratamientos difieren de las del *Tratamiento Control*. Dunnett en 1955, introdujo un procedimiento basado en un tasa de error experimental, con el propósito de establecer las diferencias entre el control y los tratamientos.

Formulado el contraste de hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_c = \mu_j \\ & \qquad\qquad c \neq j \\ H_1 &: \mu_c \neq \mu_j \end{aligned}$$

para c el tratamiento control o testigo.

La prueba de Dunnett puede resumirse de la siguiente manera: la distancia mínima entre dos medias para rechazar la hipótesis nula, manteniendo controlada la tasa de error por experimento (α_{PE}), se obtiene mediante la expresión;

$$|\overline{Y}_c - \overline{Y}_j| \geq D_{\alpha,k,gl_{error}} \sqrt{MC_{error} \sum_{j=1}^{k} \frac{C_j^2}{n_j}}$$

Si el $p - valor$ del contraste es superior a α se rechaza la hipótesis nula. Para valores tabulados de $D_{\alpha,k,gl_{error}}$ es posible estimar intervalos de confianza al $(1-\alpha)100\,\%$ para las diferencias de medias de los tratamientos individuales y la media del control $\mu_i - \mu_c$, mediante la expresión

$$\overline{y}_i - \overline{y}_c \pm D_{\alpha,k,gl_{error}}$$

Ejemplo 2.2 *Un productor avícola desea establecer cual de las tres fórmulas empleadas actualmente en la alimentación de pollos de levante es la más eficiente, para tal fin seleccionó un grupo de pollos bebe y los alimentó durante cinco semanas, los pesos de se registran en la tabla siguiente:*

	Factor		
Observaciones	Fórmula 1	Fórmula 2	Fórmula 3
1	1.50	1.98	1.50
2	1.50	2.00	1.70
3	1.60	1.97	1.70
4	1.45	1.98	1.60
5	1.55	2.00	1.50
6	1.48	1.99	1.67

Tabla 2.5:

Establecer si existe alguna fórmula más efectiva que las otras.

Para determinar cual de las fórmulas es la más eficiente en la alimentación de pollos en levante, se contrastarán las hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1 &: \text{ al menos uno diferente} \end{aligned}$$

el método estadístico apropiado es un diseño unifactorial, con variable respuesta el peso y factor las fórmulas alimenticias utilizadas, el factor presenta tres niveles, como en cada nivel existen diferentes números de observaciones el diseño es no balanceado, las conclusiones iniciales se obtienen a partir de la tabla de ANOVA.

En nuestro caso se tiene:

$$\sum_i \sum_i Y_{ij} = 30{,}67 \quad \sum_i \sum_i Y_{ij}^2 = 53{,}07$$
$$\overline{Y}_{.1} = 1{,}513 \quad \overline{Y}_{.2} = 1{,}987$$
$$\overline{Y}_{.3} = 1{,}612 \quad \sum_j \overline{Y}_{.j}^2 = 8{,}834$$

de donde:

$$\begin{aligned} SS_{Total} &= 53{,}07 - \frac{(30{,}87)^2}{18} = 0{,}812 \\ SS_{Tratamiento} &= 6 * 8{,}834 - \frac{(30{,}87)^2}{18} = 0{,}062 \\ SS_{Error} &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Luego la taba de ANOVA es

Fuente	Suma de cuadrados	G.L	Media Cuadrática	Estadístico F
Tratamientos	0.75	2	0.375	
Error	0.062	15	0.004	90.726
Total	0.812	17		

Tabla 2.6: ANOVA Pollos

Dado el nivel de significancia $\alpha = 5\,\%$, entonces el valor teórico del estadístico de prueba es $F_{2,18,0,05} = 2{,}45$, entonces como $90{,}726 = F_{Observado} > F_{Critico} = 2{,}45$, se rechaza la hipótesis nula, es decir, existen diferencias entre los pesos promedio en al menos uno de tres grupos de pollos, al nivel de significancia del $5\,\%$.

Para establecer entre que grupos existen diferencias estadísticamente significativas, es necesario aplicar alguna de las pruebas *post hoc*, consideradas anteriormente.

Para $\alpha = 5\,\%$ se tine que

$$\begin{aligned} LDS_\alpha &= t_{15,0\cdot025}\sqrt{0{,}004\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)} = 2{,}131 * 0{,}037 = 0{,}078 \\ T_\alpha &= q_{\alpha,N-a,a}\sqrt{MC_{error}/n} = 3{,}67\sqrt{\frac{0{,}004}{6}} = 0{,}094 \\ D_\alpha &= t_{N-a,\frac{\alpha}{6}}\sqrt{MC_{error}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)} = 2{,}66 * 0{,}037 = 0{,}097 \end{aligned}$$

Las comparaciones entre el valor absoluto de las diferencias de medias de los grupos definidos por los niveles del factor, con los estadísticos de Fisher, Tukey y Bonferroni, se resumen en la tabla 2.7.

Grupo i	Grupo j	$\overline{Y}_i - \overline{Y}_j$	$\lvert\overline{Y}_i - \overline{Y}_j\rvert$	LDS_α	T_α	D_α
1	2	-0.474	0.474	$\neq$	$\neq$	$\neq$
	3	-0.099	0.099	$\neq$	$\neq$	$\neq$
2	1	0.474	0.474	$\neq$	$\neq$	$\neq$
	3	0.375	0.375	$\neq$	$\neq$	$\neq$
3	1	0.099	0.099	$\neq$	$\neq$	$\neq$
	2	-0.3756	0.375	$\neq$	$\neq$	$\neq$

Tabla 2.7: Tabla resumen de pruebas múltiples

Los tres estadísticos establecen diferencias significativas al nivel del 5 %, entre los tres productos utilizados para la alimentación de los pollos bebe. Al observar la columna de diferencias de medias permite inferir que la fórmula concentrada de mejor rendimiento es la segunda, ya que todas las diferencias son mayores que cero, mientras que la de más bajo rendimiento es la primera, todas la diferencias son menores que cero.

2.4.5. Prueba de Scheffé

En la prática, existen situaciones particulares que requieren otro tipo de comparaciones múltipes de la media, en los cuales la hipótesis nula es formulada como combinación lineal de las k medias. Tal función lineal se conoce como "*Contraste*".

Definición 2.1 *Sean $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ las media de una variable X, sobre k grupos definidos por los valores de una variable categórica o factor, toda*

función lineal de la forma

$$L = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j$$

tal que $\sum_{j=1}^{k} c_j = 0$ *se conoce como contraste en media del tratamiento.*

Para contrastar la hipótesis nula

$$H_0 \quad : \quad L = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j = 0$$

$$H_1 \quad : \quad L = \sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j \neq 0$$

Se requiere desarrollar un estadístico de prueba. Para tal fin, al sustituir las medias poblacionales por sus estimadores muestrales insesgados $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \cdots, \overline{X}_k$, se obtiene el estadístico:

$$\widehat{L} = \sum_{j=1}^{k} c_j \overline{X}_j$$

Bajo el supuesto, que en cada grupo definido por el factor, la variable X se distribuye normal con media μ_j y varianza σ^2 para $j = 1, 2, \cdots, k$, las medias muestrales $\overline{X}_j$ se distribuyen normales con media μ_j y varianza $\frac{\sigma^2}{n_j}$ para $j = 1, 2, \cdots, k$

Luego

$$\widehat{L} \sim N\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j, \sigma^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j^2}{n_j} \right)$$

Si H_0 es verdadera, entonces

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \mu_j = 0$$

y

$$\frac{\widehat{L}}{\sqrt{\sigma^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j^2}{n_j}}} \sim N(0,1)$$

En consecuencia:

$$Q_1 = \frac{\widehat{L}^2}{\sigma^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j^2}{n_j}} \sim \chi_1^2$$

Análogamente

$$Q_2 = \frac{SS_W}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-k}$$

además Q_1 y Q_2 son independientes, en consecuencia

$$F = \frac{Q_1(N-k)}{Q_2} \sim F_{1,N-k}$$

Así, el estadístico de prueba asociado a la prueba de contraste, se define como:

$$F = \frac{\widehat{L}^2}{MS_W \sum_{j=1}^{k} \frac{c_j^2}{n_j}} \sim F_{1,N-k}$$

La cantidad

$$\frac{\widehat{L}^2}{\sum_{j=1}^{k} \frac{c_j^2}{n_j}}$$

se conoce como la suma cuadrática del contraste.

La regla de decisión se expresa como

- Aceptar H_0 si $F > F_{1-\alpha,1,N-K}$, en términos del $p - valor$, aceptar H_0 si $p - valor \geq \alpha$.
- En Caso contrario rechazar H_0.

Ejemplo 2.3 *Cuando se comparan dos medias el contraste se expresa como*

$$L = \mu_1 - \mu_2 = 0$$

los coeficientes del contraste son 1,-1.

Ejemplo 2.4 *Cuando se comparan tres medias el contraste se expresa de diferentes maneras:*

1. *Las dos primeras tomadas juntas, con μ_3; el contraste se expresa como*

   $$L = \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3 = 0$$

   los coeficientes del contraste son: 1,1,-2.

2. *Otra posibilidad es comparar:*

   $$\mu_2 = \frac{\mu_1 + \mu_3}{2}$$

   es decir,

   $$L = -\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 = 0$$

   y los coeficientes del contraste son -1,2,1.

3. Otra comparación es

$$\mu_1 = \mu_3$$

luego:

$$L = \mu_1 + 0\mu_2 - \mu_3 = 0$$

con coeficientes 1,0,-1.

Los coeficientes de los contrastes pueden ser asignados siguiendo reglas simples, por ejemplo:

1. Agrupar las medias en los dos grupos que se van a comparar
2. Asignar a la media de cada grupo un coeficiente igual al número de medias del otro grupo
3. Cambiar el signo de los coeficientes de un grupo y sumarlos.

Ejemplo 2.5 *Supongamos un factor con cinco categorías, y se desea comparar las medias de los dos primero grupos con las tres restantes, entonces existen dos grupos de medias el primero con dos elementos y el segundo con tres, los coeficientes del primer grupo son iguales a 3, mientras que los coeficientes del segundo grupos son todos iguales a 2, al cambiar de signo al segundo grupo el contraste se expresa como*

$$L = 3\mu_1 + 3\mu_2 - 2\mu_3 - 2\mu_4 - 2\mu_5$$

la suma de los coeficientes suma cero.

Dado un factor que descompone a la población en j subgrupos mutuamente excluyentes y exhaustivos, es posible expresar la tendencia de los contraste como polinomios de grado $g = 1, 2, 3, \cdots, j-1$.

Las tendencias polinomiales de grados 1,2,3,4,5,6 se ilustran en la figura2.2

La Prueba de Schefeé es un procedimiento muy general propuesto por Scheffé en 1953 que puede ser usado para realizar todas las comparaciones en k medias poblacionales. Se basa en el estadístico de prueba

$$F_c = \frac{d_0^2}{G\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)(k-1)}$$

despejando d se tiene:

$$d_0 = \sqrt{F_c G\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)(k-1)}$$

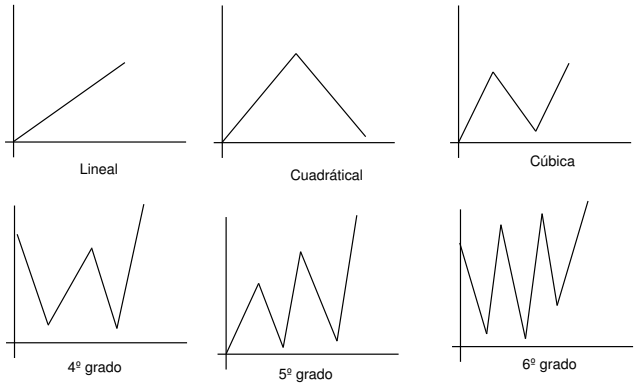

Figura 2.2: Tendencia polinomial

donde:

$$\begin{aligned} F_c &: \text{valor crítico de la distribución } F_{\alpha,k-1,N-k} \\ G &: \text{la media cuadrática intragrupos} \\ n_s &: \text{número de observaciones en el grupo } s \\ k-1 &: \text{grados de libertad de la media cuadrática intragrupos} \\ d_0 &: \text{la diferencia crítica de Scheffé} \end{aligned}$$

Considere $T_{ij} = |\overline{X}_i - \overline{X}_j|$. Para decidir si la diferencia de los pares de medias es significativa o no, se realizará el contraste de hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_i = \mu_j \\ H_1 &: \mu_i \neq \mu_j \end{aligned}$$

la regla de decisión es:

- Si $T_{ij} \geq d_0$ se acepta la existencia de diferencias significativas entre las medias μ_i y μ_j
- Si $T_{ij} < d_0$ no se acepta la existencia de diferencias significativas entre las medias μ_i y μ_j

lo cual es equivalente a:

- Si $p - valor \geq \alpha$ se acepta la existencia de diferencias significativas entre las medias μ_i y μ_j
- Si $p - valor < \alpha$ se no acepta la existencia de diferencias significativas entre las medias μ_i y μ_j

2.5. Prueba de homogeneidad de la varianza

Cuando $n_i = n$, para $i = 1, \cdots, a$ la existencia de varianzas heterogéneas entre los grupos, apenas afecta al contraste de la F. Sin embargo, si los tamaños muestrales son desiguales, la probabilidad de cometer error de tipo I puede ser diferente al valor α prefijado.

Para comprobar este supuesto, se puede considerar el test de Levene o el test de Bartlett. Sin embargo, la prueba de Levene tiene la ventaja de que no se ve afectada por la falta de normalidad del modelo, y se puede aplicar a tamaños muestrales desiguales.

La prueba de Levene permite efectuar el contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots' \sigma_a^2 \\ H_1 &: \text{ al menos una diferente} \end{aligned}$$

El estadístico de contraste de la prueba de Levene es:

$$F_0 = \frac{(a-1)\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(d_{ij} - \overline{d}_{i.})}{(N-a)\sum_{i=1}^{a}(\overline{d}_{i.} - \overline{d}_{..})}$$

donde:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= |y_{ij} - \overline{y}_{i.}| \\ \overline{d}_{i.} &= \frac{\sum_{j=1}^{n_i} d_{ij}}{n_i} \\ \overline{d}_{..} &= \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} d_{ij}}{N} \end{aligned}$$

Si las varianzas son homogéneas, entonces este estadístico F_0 se distribuye como una F de Snedecor, $F_{a-1,N-a}$. Dado α el nivel de significancia elegido, la regla de decisión se expresa como:

- Aceptar H_0 si $F_0 \geq F_{a-1,N-a,\alpha}$, equivalente a aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$
- No aceptar H_0 si $F_0 < F_{a-1,N-a,\alpha}$, equivalente a aceptar H_0 si $p - valor < \alpha$

2.6. Transformaciones para estabilizar la Varianza

Cuando se presenta homocedasticidad se debe a menudo a que la varianza cambia cuando lo hace la media. Si μ_i es la media del grupo i-ésimo y σ_i su desviación típica, entonces $\sigma_i = f(\mu_i)$ para alguna función f.

Para estabilizar la varianza se busca una función T tal que $T(x)$ tenga varianza constante.

En la práctica se usan las transformaciones de Box- Cox definidas como:

$$T(x) = \begin{cases} x^{\lambda} & \text{si } \lambda \neq o \\ \log(x) & \text{si } \lambda = o \end{cases}$$

En particular se suele considerar una función f de la forma

$$f(\mu_i) = k\mu_i^{\alpha}$$

de modo que

$$\sigma_i = k\mu_i^{\alpha}$$

Se puede demostrar que para conseguir la homocedasticidad, se debe usar la transformación con parámetro: $\lambda = 1 - \alpha$

Para estimar λ se usan los diagramas rango-media. Se asume el ajuste a una ecuación del tipo $\sigma_i = k\mu_i^{\alpha}$ y así,

$$\log(\sigma) = \log(k) + \alpha \log(\mu)$$

α será la pendiente de la recta que pasa por los puntos del gráfico, esto es, de la correspondiente recta de regresión. Una vez estimado α se calcula $\lambda = 1 - \alpha$.

Observaciones:

1. Las transformaciones estabilizadoras de la varianza se definen sólo para conjuntos de datos positivos. En caso contrario, hay que sumar una constante a los datos.

2. En general se considera una rejilla de valores de λ y se va probando con múltiplos de $\frac{1}{2}$.

3. Frecuentemente la transformación no sólo estabiliza la varianza sino que normaliza los datos, cuando estos no se distribuyen como una normal.

2.7. Modelos con efectos aleatorios

Si el número de niveles del factor no está fijado de antemano, sino que es una muestra aleatoria de una población de niveles, entonces se tiene un modelo de efectos aleatorios.

El modelo se expresa igual que antes

$$Y_{ik} = \mu + \tau i + \varepsilon_{ij}$$

donde $i = 1, \cdots, a$; $j = 1, \cdots, n$, suponiendo grupos de igual tamaño, siendo, en este caso τ_i, ε_{ij} variables aleatorias independientes.

Si se asume que τ_i y ε_{ij} son independientes, y que τ_i tiene como varianza σ_τ^2, entonces la varianza de una observación dada es

$$Var(Y_{ij}) = \sigma_\tau^2 + \sigma^2$$

Se denomina a σ^2y a σ_τ^2 los *componentes de la varianza* y se supone que

$$\begin{aligned} \tau_i &\sim N(0, \sigma_\tau^2) \\ \varepsilon_{ij} &\sim N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

independientemente entre sí.

Ahora carece de sentido contrastar hipótesis basadas en tratamientos individuales, por lo que se contrasta:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_\tau^2 = 0 \\ H_0 &: \sigma_\tau^2 > 0 \end{aligned}$$

Todos los tratamientos serán iguales si $\sigma_\tau^2 = 0$. Sin embargo, si $\sigma_\tau^2 > 0$ existe variabilidad entre los tratamientos.

En este caso, si H_0 es cierta, $\sigma_\tau^2 = 0$, entonces

$$F = \frac{MC_T}{MC_E} \sim F_{a-1,N-a}$$

Si se consideran los valores esperados de las medias de cuadrados, entonces

$$E(MC_T) = \frac{1}{a-1} E(SC_T) = \frac{1}{a-1} E\left[\sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i.}}{n} - \frac{Y_{..}}{N} \right] = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2$$

Del mismo modo, se obtiene que

$$E(MC_E) = \sigma^2$$

Si la hipótesis alternativa es cierta, entonces el valor esperado del numerador en F_0 es mayor que el esperado del denominador. Así, se rechaza H_0 para valores altos de F_0, con lo cual, la región crítica es unilateral superior, rechazándose si

$$F_0 > F_{a-1,N-a,\alpha}$$

El procedimiento de cálculo es igual que en el modelo de efectos fijos, aunque las conclusiones se aplican a toda la población de tratamientos. Si se igualan los valores esperados de las medias de cuadrados con los valores observados, se obtiene

$$E(MC_T) = \sigma^2 + \sigma_\tau^2, \quad E(MC_E) = \sigma^2$$

de donde:

$$\widehat{\sigma}^2 = E(MC_E), \quad \widehat{\sigma}_\tau^2 = \frac{E(MC_T) - E(MC_E)}{n}$$

2.7.1. Intervalos de confianza para los componentes de la varianza

La estimación de los intervalos de confianza para ambos componentes de la varianza, se realiza de manera semejante a los intervalos de confianza para la varianza construidos en la teoría clásica de estimación de parámetros. El estimador exacto del intervalo de confianza para el componente asociado a los residuos σ^2 al $(1-\alpha)100\,\%$ es:

$$\frac{SC_{error}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},N-k}} < \sigma^2 < \frac{SC_{error}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},N-k}}$$

De manera similar, un intervalo de confianza para el componente de la varianza para σ_τ^2 al $(1-\alpha)100\,\%$ es:

$$\frac{SC_{Tratamiento}(1-\frac{F_u}{F})}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},k-1}} < \sigma^2 < \frac{SC_{Tratamiento}(1-\frac{F_l}{F})}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},k-1}}$$

donde

$$F_u = F_{\frac{\alpha}{2},k-1,N-k} \quad F_l = F_{1-\frac{\alpha}{2},k-1,N-k} \quad F = F_{critico}$$

Finalmente, un intervalo de confianza al $(1-\alpha)100\,\%$ para el cociente $\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2+\sigma_\tau^2}$ está definido por:

$$\frac{l_1}{1+l_2} < \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma^2+\sigma_\tau^2} < \frac{l_2}{1-l_2}$$

Donde:

$$l_1 = \frac{1}{n}\left(\frac{MC_{Tratamiento}}{MC_{error}}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},k-1,N-k}} - 1\right)$$
$$l = \frac{1}{n}\left(\frac{MC_{Tratamiento}}{MC_{error}}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},k-1,N-k}} - 1\right)$$

Ejemplo 2.6 *Una copañia de seguros desea que el tiempo de reposo de los pacientes post operatorios sea homogéneo para establecer políticas de equidad entre los diferentes centros adscritos a la empresa. Se seleccionan tres medicos en centros al azar y se registran los tiempos de cinco pacientes atendidos por cada medico recientemente, la información se resume en la tabla 2.8*

	Factor			
Sujetos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	
1	5	4	5	14
2	6	4	8	18
3	4	6	6	16
4	7	5	6	18
5	6	5	8	19
Totales	28	24	33	85
Promedios	5.6	6	6.6	5.67

Tabla 2.8: Datos

Al estimar las sumas de cuadrados se tiene:

$$SC_{Total} = 23{,}333$$
$$SC_{Tratamientos} = 8{,}133$$
$$SC_{Error} = 15{,}200$$

Fuente de variación	Suma de cuadrados	G.L	Media Cuadrática	F
Tratamiento	8.333	2	4.067	
Error	15.200	12	1.267	3.211
Total	23.333	14		

Tabla 2.9: ANOVA: Componentes de la varianza

El estadístico del contraste de hipótesis:

$$H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$$
$$H_1 : \sigma_\tau^2 \neq 0$$

bajo H_0 satisface:

$$F = \frac{MC_{Tratamientos}}{MC_{error}} \sim F_{k-1,N-k}$$

en nuestro caso se cumple $F_{2,12}$, para un nivel de significancia fijo igual a $\alpha = 1\,\%$, el valor crítico es $F_{0\cdot01,2,12} = 6{,}93$ es decir, se acepta la hipótesis nula, la cual garantiza que los niveles del factor no influyen en el valor de la variable respuesta. En conclusión el tiempo de reposo no depende del medico que lo trata.

Aun cuando la conclusión anterior garantiza que al nivel de significancia del 1 % el medico tratante no influye en el tiempo de reposo postoperatorio, por razones didácticas se estimarán los componentes de la varianza asociada a los tratamientos, medicos y al error.

$$\sigma^2 = 1{,}267, \quad \sigma_\tau^2 = \frac{4{,}067 - 1{,}267}{5} = \frac{2{,}8}{5} = 0{,}56$$

La estimación de la varianza de cada una de las observaciones de la muestra está definida por:

$$\sigma^2 + \sigma_\tau^2 = 1{,}267 + 0{,}56 = 1{,}827$$

es decir, apróximadamente el 70 % de la variabilidad del tiempo de reposo se debe al azar y no al medico tratante.

2.8. Uso del SPSS

A continuación se describirán cuales son los pasos necesarios para realizar el **Análisis de la Varianza** utilizando la aplicación del SPSS para Windows. Para nuestra aplicación utilizaremos el ejemplo en el que se intenta determinar si existen diferencias significativas en el promedio de una variable cuantitativa, en la k subpoblaciones definidas por los valores de una variable cualitativa, categórica o factor.

Para ello, una vez abierto nuestro archivo de datos, ejecutamos la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Comparar Medias -->  ANOVA de un factor
```

Una vez seleccionada esta opción aparece el cuadro de diálogo del ANOVA de un factor, ilustrado en la figura 2.3:

Los campos asociados a caja de diálogo son:

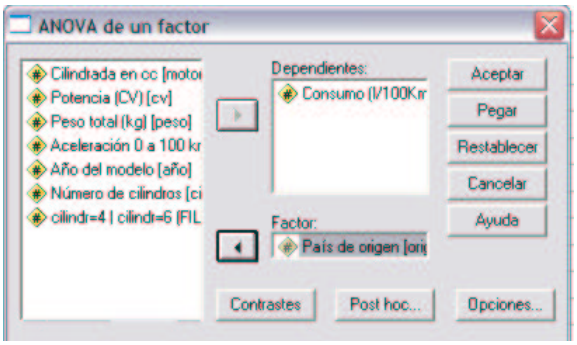

Figura 2.3: ANOVA

Dependientes: muestra las variables dependientes que ha elegido para el análisis.

Factor: variable independiente que define grupos de casos.

Contrastes: permite dividir la suma de cuadrados inter-grupos en componentes de tendencia o especificar contrastes a priori para que se contrasten mediante el estadístico t.

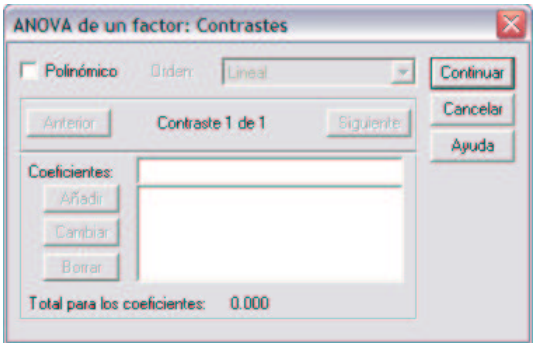

Figura 2.4: ANOVA: contrastes

A continuacón se describen los campos de interés

Polinomial: permite dividir la suma de cuadrados inter-grupos en componentes de tendencia polinómicos. Después de seleccionar

Polinómico, seleccione el mayor orden del polinomio que desee modelar. Puede elegir hasta un orden 5.

Contraste 1 de..: permite especificar hasta 10 conjuntos de contrastes. Utilice **Siguiente y Previo** para desplazarse por los conjuntos de contrastes.

Coeficientes: introduzca un valor numérico para el coeficiente correspondiente a cada grupo (categoría) de la variable de factor y pulse en **Añadir**. Puede cambiar o eliminar un coeficiente después de haberlo añadido a la lista, seleccionándolo y pulsando el botón pertinente. El número de coeficientes debe ser igual al número de grupos o el análisis no se llevará a cabo.

Post Hoc: cuando en el ANOVA se rechaza la hipótesis nula (es decir cuando aceptemos la hipótesis de que los niveles del factor influyen sobre la variable endógena) será interesante realizar un análisis ex-post. Este tipo de análisis se basa en comparaciones múltiples por parejas entre las medias de los distintos grupos, para así, conocer a qué grupos exactamente se deben las diferencias observadas entre ellos. El botón **Post Hoc** nos permite seleccionar distintas pruebas para realizar este tipo de análisis, entre las que se encuentran el test de la Diferencia Mínima Significativa (DMS), Bonferroni, Sidak, etc. La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 2.5

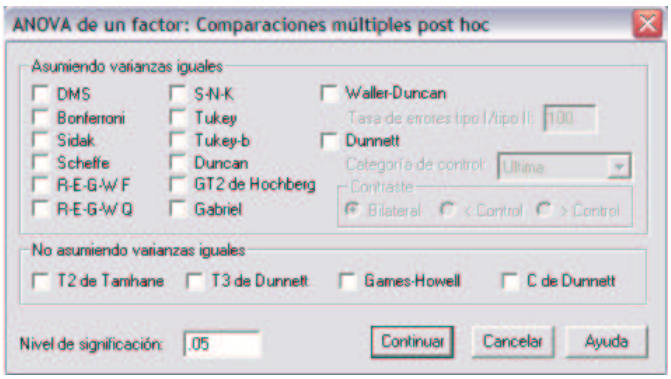

Figura 2.5: ANOVA: Post Hoc

Opciones: permite obtener estadísticos opcionales y cambiar el tratamiento de los valores perdidos.

La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 2.6

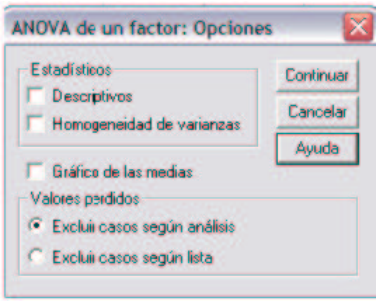

Figura 2.6: ANOVA: Opciones

Las distintas alternativas de la caja de diálogo se explican a continuación:

Descriptivos: muestra el número de casos, la media, la desviación típica, el error típico, los valores mínimo y máximo y el intervalo de confianza al 95 % para cada variable dependiente en cada grupo.

Homogeneidad de varianzas: contrastan las violaciones del supuesto de igualdad de varianzas utilizando la prueba de Levene.

Gráficos de medias: muestra un gráfico que representa las medias de subgrupo (las medias de cada grupo definido por los valores de la variable factor).

Excluir casos según análisis: excluye los casos que tienen valores perdidos en la variable implicada en esa prueba.

Excluir casos según lista: excluye los casos que tienen valores perdidos en cualquiera de las variables utilizadas en cualquiera de los análisis.

Una vez seleccionadas todas las opciones que consideremos necesarias para nuestro análisis ya estaremos en condiciones para realizar al análisis de la varianza (ANOVA), pulsando la tecla Aceptar. Los resultados del ANOVA aparecerán en el Navegador de resultados de SPSS.

Los diseños unifactoriales con efectos aleatorios, son desarrollados en SPSS, mediante la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo Lineal general --> componentes de la varianza
```

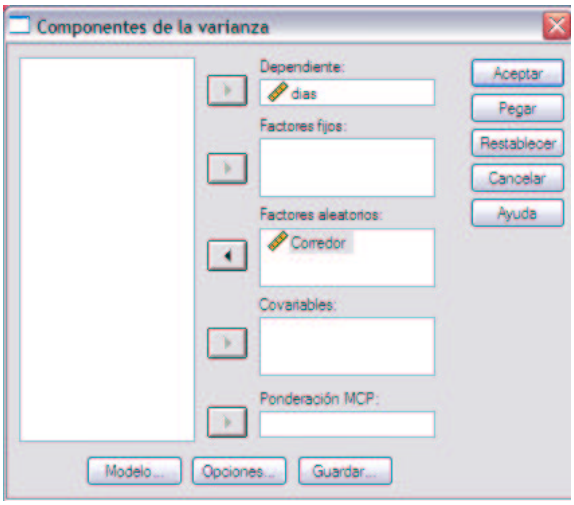

Figura 2.7: Componentes de la varianza

la cual activa la caja de diálogo ilustrada en la figura 2.7

Los campos más importantes de esta caja de diálogos son:

Dependiente: variable cuyos valores se desea predecir o resumir.

Factor Fijo: los niveles de un factor fijo incluyen todos los niveles sobre los que se desea extraer conclusiones.

Factor aleatorio: los niveles de un factor aleatorio son una muestra aleatoria de todos los posibles niveles sobre los que se desea establecer una conclusión. Se requiere al menos un factor aleatorio.

Covariable: las covariables son variables predictoras cuantitativas. Puede utilizar las covariables junto con las variables dependientes para definir un modelo de regresión.

Ponderación MCP: muestra la variable numérica que contiene los pesos para el análisis de mínimos cuadrados ponderados. Si el valor de la variable de ponderación es cero, negativo o perdido, el caso queda excluido del análisis. Una variable que ya se haya utilizado en el modelo no puede usarse como variable de ponderación.

Modelo: permite definir un modelo Personalizado. La caja de diálogo asociada se ilustra en la figura 2.8

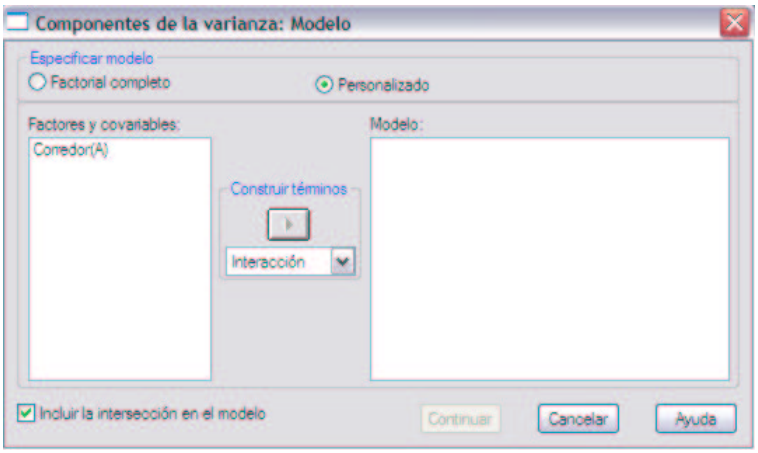

Figura 2.8: Componentes de la varianza: modelo

Opciones: permite elegir un método (EMNCI, ANOVA, MV o MVR) y las opciones de visualización (las sumas de cuadrados, las medias cuadráticas esperadas, o la historia de iteraciones). La caja de diálogo asociada se ilustra en la figura 2.9

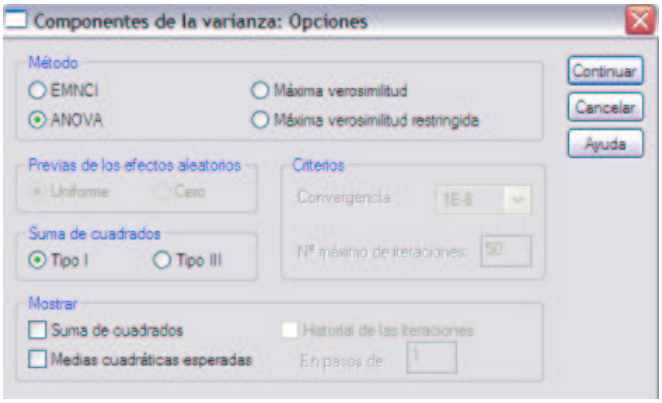

Figura 2.9: Componentes de la varianza: Opciones

Guardar: permite guardar las estimaciones de las componentes de la varianza en un archivo de datos. Si lo desea, también puede guardar la matriz de correlaciones o la de covarianza. La caja de diálogo asociada se ilustra en la figura 2.10

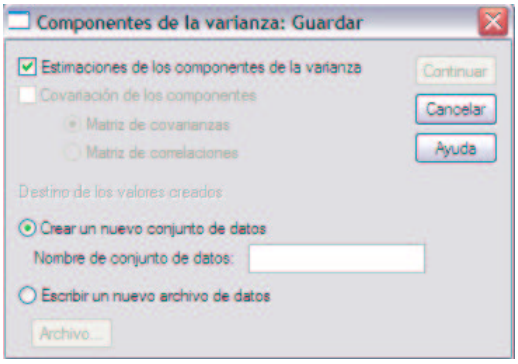

Figura 2.10: Componentes de la varianza: guardar

2.9. Solución de problemas

Problema 2.1 *En el departamento de matemáticas del Colegio* San Angrés *se ha presentado un alto índice de alumnos reprobados, para dar respuesta favorable a este problema fueron desarrollados dos diseños instruccionales, denominados Diseño I y Diseño II, se seleccionaron 66 alumnos al azar, y se distribuyeron aleatoriamente en tres grupos con igual número de individuos por grupo. Un grupo control y dos grupos que fueron enseñados empleando cada diseño instruccional. Se realizo una evaluación de entrada cuyas calificaciones se resumen en la variable* Antes*, posterior a la aplicación de los diseños se efectuó una nueva evaluación las calificaciones se resumen en la variable* Después*, además se registró el género de cada participante Establecer al nivel de significancia de 2 % la existencia o no de diferencias en el rendimiento de los tres grupos después de la aplicación del ensayo.*

Antes de establecer la existencia o no de diferencias en el desempeño de los alumnos posterior a la aplicación de los diseños instruccionales, es recomendable conocer si las habilidades medias en los grupos eran similares antes del ensayo.

Para tal fin, realizaremos el contraste de ANOVA para la variable *Antes*,

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_{A1} = \mu_{A2} = \mu_{A3} \\ H_1 &: \text{al menos un par distinto} \end{aligned}$$

Ejecutando la secuencia de comandos

```
Analizar --> Comparar Medias -->  ANOVA de un factor
```

y seleccionando en la caja de diálogo asociada, los campos:

```
Dependiente: Antes
Factor: Técnicas
 Opciones: Homogeneidad de la varianza
   Continuar
Aceptar
```

Se obtiene el reporte constituido por las tablas siguientes:

Estadístico de Levene	GL1	GL2	Sig
0.305	2	63	0.738

Tabla 2.10: Prueba de Homogeneidad de la varianza

La lectura de la tabla 2.10 confirma que podemos asumir la igualdad de la varianza, ya que el $p - valor$ del contraste de hipótesis es mayor al nivel de confianza $\alpha = 2\,\%$.

Antes	Fuente	SC	Gl	MC	F	Sig.
	Inter-grupo	7.826	2	3.913		
	Intra-grupos	292.739	63	4.647	.842	.436
	Total	300.564	65			

Tabla 2.11: Tabla ANOVA: Antes

La tabla 2.11 reporta la prueba ANOVA para la variable *Antes*, el $p - valor$ del contraste es igual a 0.436, mayor que el nivel de significancia, es decir, se acepta la igualdad de los promedios de calificaciones antes del ensayo en los tres grupos definidos por los valores de la variable factor.

Dado que, las medias y las varianzas de las puntuaciones antes del ensayo son iguales, podemos afirmar que los estudiantes de los tres grupos poseen habilidades medias similares, como era de esperar al haber hecho la distribución aleatoriamente.

Deseamos contrastar la hipótesis nula que afirma la igualdad de promedios en las calificaciones del grupos control y los dos diseños. Para ello podríamos considerar los resultados obtenidos en la medición *Después*. Pero sin duda estaría influenciada por la habilidad previa de cada estudiante.

Para eliminar esta fuente de variabilidad podríamos considerar a cada estudiante como su propio control y definir una nueva variable: *Diferencia = Después - Antes*. Ahora el contraste de hipótesis está definido como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_{D1} = \mu_{D2} = \mu_{D3} \\ H_1 &: \text{ al menos dos distintos} \end{aligned}$$

Previo al contraste de hipótesis realizaremos un análisis exploratorio de la variable diferencias; mediante la secuencia de comandos:

```
Analizar --> estadísticos descriptivos --> explorar
```

en la caja de diálogo seleccionamos:

```
Dependiente: Diferencia
Factor: Técnicas
Mostrar: Ambos
      Gráficos: Diagramas de caja
                Dependientes juntas
               Gráficos con pruebas de normalidad
               Dispersión por nivel con prueba de Levene
                  Estimación de la potencia
             Continuar
Aceptar
```

El diagrama de Boxplot ilustrado en la figura 2.11 se observa que aparentemente el grupo control tiene resultados peores que los alcanzados por los diseños instruccionales formulados para la realización del ensayo.

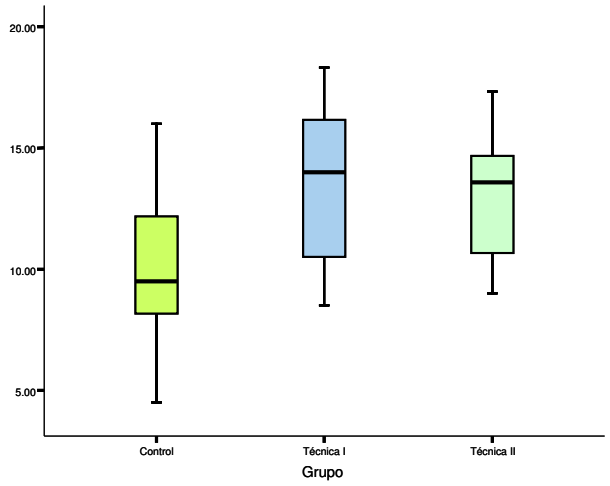

Figura 2.11: Diagrama de cajas para diferencias

En la tabla 2.13 se reporta un resumen de los estadísticos descriptivos asociados a la variable Diferencias, en cuanto a las medias los dos diseños presentas promedios similares, mientras que el promedio alcanzado por el grupo control es aparentemente diferente a los otros valores.

Los valores estimados para las varianzas y los rangos intercuartilícos son muy similares, razón por la cual se puede suponer homogeneidad de las varianzas de la variable *diferencia* en los tres grupos definidos por los valores del factor *Técnicas*.

Automáticamente el SPSS efectúa el contraste paramétrico de homogeneidad de la varianza:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 \\ H_1 &: \text{al menos una es diferente} \end{aligned}$$

Los resultados del contraste se resume en la tabla 2.12:

Estadístico de Levene	GL1	GL2	Sig
1.412	2	63	.251

Tabla 2.12: Prueba de Homogeneidad de la varianza

Como el $p - valor$ asociado al contraste es igual a 0.251, mayor que el nivel de significancia, entonces se acepta la hipótesis nula de igualdad de las varianzas de la variable dependiente, en los tres grupos generados por los valores del factor.

	Grupo		Estadístico	Error Típ.
Diferencia	Control	Media	9.8712	.57032
		Varianza	7.156	
		IQ	4.17	
		Asimetría	.288	.491
		Curtosis	.121	.953
	Diseño I	Media	13.5000	.65300
		Varianza	9.381	
		IQ	5.75	
		Asimetría	-.161	.491
		Curtosis	-1.344	.953
	Diseño II	Media	13.0909	.50511
		Varianza	5.613	
		IQ	4.13	
		Asimetría	-.222	.491
		Curtosis	-.961	.953

Tabla 2.13: Estadísticos descriptivos

Al calcular el cociente entre el valor estimado del coeficiente de asimetría entre el error típico de la media se ubica entre -2 y 2, de manera similar

ocurre para el cociente del coeficiente de curtosis entre su error típico, por tal razón se puede suponer normalidad de la variable independiente en los tres grupos definidos por el factor.

El contraste no parámetrico:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{la distribución es normal} \\ H_1 &: \text{La distribución no es normal} \end{aligned}$$

es reportado en la tabla 2.14

		Kolmogorov-Smirnov			Shapiro-Wilk		
	Grupo	Estadístico	Gl	sig	Estadístico	Gl	sig
Diferencia	Control	.121	22	.200	.978	22	.880
	Diseño I	.126	22	.200	.940	22	.195
	Diseño II	.133	22	.200	.949	22	.303

Tabla 2.14: Prueba de Normalidad

El $p - valor$ asociado al contraste de Kolmogorov-Smirnov al igual que para el contraste de Shapiro-Wilk es mayor que $\alpha = 2\,\%$ en los tres grupos, por tal razón podemos asegurar que la variable dependiente se distribuye normal en los tres grupos definidos por el factor. Los supuestos teóricos necesarios para la realización del ANOVA fueron verificados, entonces al ejecutar la secuencias de comandos:

```
Analizar --> Comparar Medias --> ANOVA de un factor
```

y seleccionar los campos:

```
Dependiente: Diferencias
Factor: técnicas
  Post Hoc: Tukey
    Continuar
   Opciones: Gráficos de medias
     Continuar
 Aceptar
```

Se obtiene el reporte asociado al ANOVA de un factor.

La tabla 2.15 ofrece un resumen del ANOVA de un factor, como el $p - valor$ del contraste es igual a 0.000, inferior al nivel de significancia fijado por el investigador se rechaza la hipótesis nula de igualdad de las medias en los tres grupos definidos por el factor.

Antes	Fuente	SC	Gl	MC	F	Sig.
	Inter-grupo	173.814	2	86.907		
	Intra-grupos	465.148	63	7.383	11.771	0.000
	Total	638.962	65			

Tabla 2.15: Tabla ANOVA: después

Esto quiere decir, que efectivamente aceptamos la existencia de diferencias estadísticamente significativas entre los resultados de las tres técnicas, las diferencias no han sido causadas por el azar.

La tabla ANOVA reporta la existencia de diferencias estadísticamente significativas en los promedios de la variable dependiente en los tres grupos definidos por el factor, pero no reporta en cuales grupos existen.

El contraste *post hoc*, solicitado mediante la prueba de Tukey, reporta en que grupos existen diferencias estadísticamente significativas.

Al leer la tabla 2.16 se observa que la prueba de Tukey detecta diferencias estadísticamente significativas para las combinaciones: Grupo control diseño I y grupo control diseño II, y no encuentra diferencias entres los diseños, ya que en las primeras combinaciones el $p-valor$ asociado al contraste es menor que α.

					IC al 99 %	
Grupo I	Grupo J	Diferencia de medias(I-J)	Error Típico	Sig.	Lím Inf	Lím Sup
Control	Diseño I	-3.62879	.81927	.000	-5.5953	-1.6623
	Diseño II	-3.21970	.81927	.001	-5.1862	-1.2532
Diseño I	Control	3.62879	.81927	.000	1.6623	5.5953
	Diseño II	.40909	.81927	.872	-1.5574	2.3756
Diseño II	Control	3.21970	.81927	.001	1.2532	5.1862
	Diseño I	-.40909	.81927	.872	-2.3756	1.5574

Tabla 2.16: Prueba de Tukey

De igual manera la prueba de Tukey reporta los grupos estadísticamente significativos al nivel α, en la tabla 2.17, estos subgrupos se ilustran en la gráfica 2.12.

Cuando la hipótesis de partida es más "*fina*", es decir, si al inicio del ensayo pensamos, antes de recoger los datos, que el grupo control obtendría resultados diferentes a los que siguieron los diseños I y II, es lógico, entonces no hacer comparaciones tan genéricas como las *post hoc*, y hacer exactamente esa. Tal contraste es del tipo planeada, en tal caso como la hipótesis afirma

		Subgrupos significativos	
Grupo	N	1	2
Control	22	9.8712	-
Diseño I	22	-	13.0909
Diseño II	22		13.5000
Sig.		1.000	.872

Tabla 2.17: Grupos significativos al 5 %

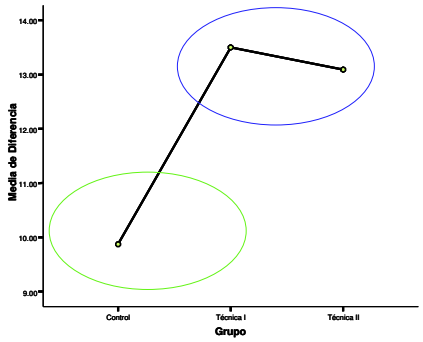

Figura 2.12: Gráfico de medias

que el grupo control difiere en promedio de los grupos a los cuales se aplicaron los diseños, entonces se tienen dos grupos: el primero con un factor y el segundo con dos niveles, entonces una forma de definir el contraste es:

$$L = \mu_1 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

el contraste de hipóstesis se define como:

$$\begin{aligned} H_0 &: L = 0 \\ H_1 &: L \neq 0 \end{aligned}$$

La información asociada a este contraste de hipótesis se resume en la tabla 2.18.

			Valor del	Error			
	Varianza	Contraste	contraste	Típico	t	Gl	Sig.
Diferencia	Igual	1	-3.4242	.70951	-4.826	63	.000
	Diferente	1	-3.4242	.70403	-4.864	42.556	.000

Tabla 2.18: Contrastes

El $p - valor$ asociado al contraste lineal, en el caso de asumir varianzas iguales como diferentes es igual a 0.000, por tanto los resultados son muy significativos para confirmar la sospecha que el grupo control presenta diferencias significativas con los grupos asistidos por los dos diseños instruccionales.

Problema 2.2 *Para determinar la eficiencia de tres métodos para dejar de fumar, un investigador clínico realizó un ensayo, seleccionando al azar 40 fumadores, distribuidos al azar para la aplicación de los métodos a fumadores con características similares. El número de cigarrillos que cada fumador dejó de fumar diariamente se resume en la tabla 2.19. Determine cuál de los tres métodos es más efectivo para dejar de fumar.*

Método	Cigarrillos													
1	57	52	52	59	53	49	55	52	54	57	48	56	58	49
2	47	50	54	54	51	52	56	48	53	49	48	50		
3	55	57	50	51	57	53	51	59	53	55				

Tabla 2.19: Cigarrillos dejados de fumar

Antes de establecer diferencias o no entre los tres métodos considerados para dejar de fumar, se realizará un análisis exploratorio de los datos relacionados con el número de cigarrillos dejados de fumar, durante el mes.

Para tal fin se ejecutará la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Estadísticos descriptivos --> Explorar
```

En la caja de diálogo asociada, seleccione los campos:

```
Dependiente: Cigarrillos
Factor: Métodos
 Mostrar: Ambos
  Estadísticos:
     Descriptivos
   Continuar
   Gráficos:
     Diagramas de cajas: Dependientes juntas
     Gráficos con pruebas de normalidad
     Dispersión por nivel con prueba de Levene :
      Estimación de potencia
   Continuar
 Aceptar
```

El reporte del procedimiento estadístico **Explorar**, contiene un conjunto de tablas que resumen los estadísticos descriptivos más importantes de la variable dependiente, en los grupos definidos por el factor, resumidos en la tabla 2.20.

	Método		Estadístico	Error típico
Cigarrillos	1	Media	53.87	.904
		Varianza	12.267	
		Asimetría	-.275	.580
		Curtosis	-1.110	1.121
	2	Media	52.42	.925
		Varianza	10.265	
		Asimetría	1.297	.637
		Curtosis	1.591	1.232
	3	Media	54.33	1.067
		Varianza	10.250	
		Asimetría	-.065	.717
		Curtosis	-1.548	1.400

Tabla 2.20: Estadísticos descriptivos

Los valores reportados para la media de la variable dependiente en los grupos definidos por los valores del factor son, aparentemente similares, de igual manera, las varianzas son semejantes en los tres grupos definidos por la variable independiente. El cociente del coeficiente de la asimetría por el error típico de asimetría se ubican entre -2 y 2, en los tres grupos definidos por el factor, igual comportamiento presenta en coeficiente de curtosis, lo cual induce a que las variable dependiente se distribuye normal en los grupos definidos por los niveles del factor.

Para corroborar el supuesto anterior es necesario analizar el reporte del contraste de normalidad

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{la distribución es normal} \\ H_1 &: \text{la distribución no es normal} \end{aligned}$$

El resumen del contraste de hipótesis relativo a la normalidad de la dsitribución de la variable dependiente en los grupos de interés, se resume en la tabla 2.21

Al leer la tabla 2.21 se observa que el $p - valor$ del contraste asociado al estadístico de Kolmogorov-Smirnov y al de Shapiro-Wilk, en los tres niveles del factor es mayor al nivel de significancia $\alpha = 2\,\%$, es decir, no existen

		Kolmogorov-Smirnov			Shapiro-Wilk		
	Método	Estadístico	Gl	sig	Estadístico	Gl	sig
Método I	Control	.148	15	.200	.938	15	.356
	Método II	.191	12	.200	.868	12	.061
	Método III	.184	9	.200	.927	9	.452

Tabla 2.21: Prueba de Normalidad

evidencia estadísticamente significativas para rechazar la hipótesis de normalidad de la distribución de la variable dependiente en los grupos definidos por los valores del factor.

Por otra parte, la similitud de las varianzas, en los tres grupos, conduce al contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 \\ H_1 &: \text{ al menos dos distintas} \end{aligned}$$

El estdístico de prueba de interés, es el definido por Levene, la información asociada al contraste se resume en la tabla 2.22. Dado que el $p - valor$ del constaste es mayor al nivel de significancia $\alpha = 2\,\%$, no existen evidencia estadísticamente significativas para rechazar la hipótesis nula de homocedasticidad.

Estadístico de Levene	GL2	GL2	sig
.241	2	33	.787

Tabla 2.22: Prueba de homogeneidad de la varianza

El diagrama de cajas ilustrado en la figura 2.13, muestra una posible diferencia en los resultados asociados a los tres métodos empleados para dejar de fumar. Las longitudes de las caja aparentemente son diferentes.

Para descartar o no la existencia de deferencia estadísticamente significativas en cuanto a la eficiencia de los tres métodos empleados para dejar de fumar, es necesario efectuar, un análisis de la varianza de un factor, mediante la ejecución de la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Comparar Medias --> ANOVA de un factor
  Dependiente: Ciga
  Factor: fact
    Opciones: Gráfico de medias
     Continuar
 Aceptar
```

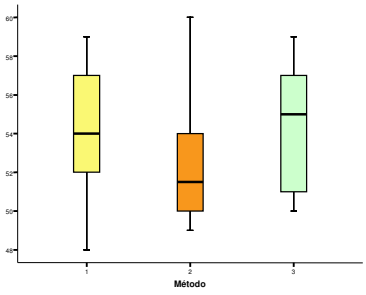

Figura 2.13: Gráfico de cajas

Dado que, ya es conocida la normalidad y homocedasticidad de la variable dependiente en los grupos definidos por los valores del factor, no es necesario solicitar las pruebas robustas de igualdad de la media. La información asociada a la secuencia de comandos relativa al contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1 &: \text{al menos dos distintas} \end{aligned}$$

se resume en la tabla 2.23. el $p-valor$ de la tabla ANOVA, es mayor al nivel de significancia $\alpha = 2\,\%$, es decir no existen evidencias significacativas para rechazar la hipótesis nula, las posibles diferencias en los resultados promedios de los tres métodos usados en el control para dejar de fumar, son debidas al azar.

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media Cuadrática	Estadístico F	Sig.
Inter-Grupos	22.350	2	11.175		
Intra-Grupos	366.650	33	11.111	1.006	.377
Total	389.000	35			

Tabla 2.23: ANOVA

Lo antes afirmado se ilustra en el gráfico 2.14

Problema 2.3 *La empresa "Hipermercado Paraíso"; atiende al publíco 24 horas al día en cuatro turnos de 6 horas cada uno*

La gerencia del hipermercado afirma que el nivel de ventas en el cuarto turno, es el de más bajo; por tal razón se debe eliminar el turno y modificar el horario laboral hasta las 12:00 pm. Para tal fin se evaluó durante seis días el volumen diario en cada turno, la información se resume en el archivo

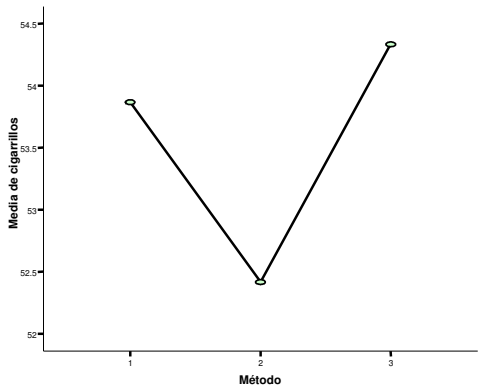

Figura 2.14: Gráfico de medias

Turno 1	6 am a 12 m
Turno 2	12m a 6 Pm
Turno 3	6 Pm. a 12 Pm
Turno 4	12 Pm. a 6 am

Paraíso. Sav. ¿Existen evidencias estadísticas al nivel del 2 % para eliminar el cuarto turno?.

Para determinar la eliminación o no del cuarto turno, se desarrollará un diseño unifactorial con un factor fijo. La variable dependiente es el nivel de ventas medido en miles de bolívares fuertes, el factor fijo está determinado por los cuatro turnos de trabajo diario.

Previo al análisis de la varianza asociado al diseño, se efectuará un análisis exploratorio de los datos, mediante la ejecución de la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Estadísticos descriptivos --> Explorar
```

En la caja de diálogo asociada, seleccione los campos:

```
Dependiente: Ventas
Factor: Turnos
 Mostrar: Ambos
  Estadísticos:
     Descriptivos
   Continuar
   Gráficos:
     Diagramas de cajas: Dependientes juntas
```

```
      Gráficos con pruebas de normalidad
      Dispersión por nivel con prueba de Levene :
       Estimación de potencia
    Continuar
  Aceptar
```

La tabla 2.24 reporta los estadísticos descriptivos más relevantes en el análisis:

	Turno		Estadístico	Error típico
Ventas	1	Media	1365.3933	331.39946
		Varianza	658953.613	
		Asimetría	.930	.845
		Curtosis	-.142	1.741
	2	Media	2687.8167	317.40718
		Varianza	604483.904	
		Asimetría	.377	.845
		Curtosis	-.144	1.741
	3	Media	1705.9833	282.94824
		Varianza	480358.233	
		Asimetría	-.018	.845
		Curtosis	-1.836	1.741
	4	Media	326.1300	35.85027
		Varianza	7711.4523	
		Asimetría	-.009	.845
		Curtosis	-1.974	1.741

Tabla 2.24: Estadísticos descriptivos

Los valores estimados para las medias y las varianzas del volumen de ventas, en los grupos definidos por los valores de la variable independiente o factor; reflejan aparentes diferencias en ambos estadísticos. De igual manera, el cociente entre la asimetría y su error típico de estimación se ubican entre -2 y 2, en los grupos de interés, comportamiento análogo se observa para la curtosis, este comportamiento de la distribución del volumen de ventas en los grupos, induce a pensar en un comportamiento normal de la distribución de la variable dependiente.

Para verificar el comportamiento normal de la distribución del volumen de ventas en los cuatro grupos definidos por el factor turnos, es necesario realizar el contraste semiparamétrico:

$$H_0 \quad : \quad \text{la distribución es normal}$$
$$H_1 \quad : \quad \text{la distribución no es normal}$$

Las conclusiones del contraste se toman empleando la prueba de Kolmogorov-Smirnov y la de Shapiro-Wilk, resumidas en la tabla 2.25. El $p - valor$ de ambos contrastes en los cuatro grupos definidos por los niveles del factor, es mayor que $\alpha = 2\,\%$ en cada uno de los casos en estudio, es decir, no existen evidencias significativas para rechazar la hipótesis nula.

		Kolmogorov-Smirnov			Shapiro-Wilk		
	Turno	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Ventas	Turno 1	.262	6	.200	.913	6	.455
	Turno 2	.184	6	.200	.927	6	.560
	Turno 3	.183	6	.200	.930	6	.583
	Turno 4	.183	6	.200	.943	6	.680

Tabla 2.25: Prueba de normalidad

El gráfico de cajas muestra posibles diferencias en el volumen de ventas en el cuarto turno, en este turno se observa, aparentemente un bajo nivel de ventas, mientras que, en el segundo turno las ventas posiblemente, presentan el mejor nivel de ventas; los turnos restantes parecieran tener niveles de ventas similares.

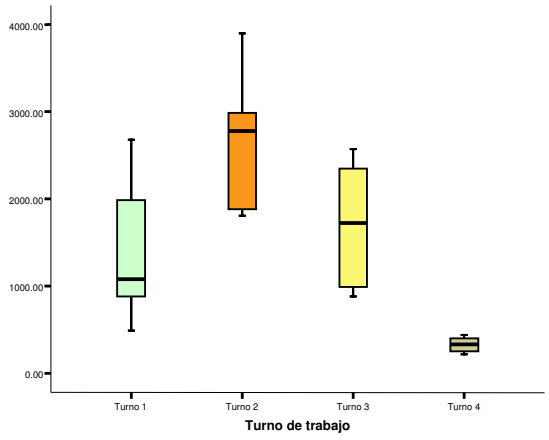

Figura 2.15: Diagrama de cajas

Además del supuesto de normalidad para la distribución de la variable dependiente en los grupos definidos por el factor, se debe verificar el supuesto

de homogeneidad de la varianza en estos grupos, para tal fin se efectué el contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 \\ H_1 &: \text{ al menos dos diferentes} \end{aligned}$$

El estadístico de prueba para este contraste de hipótesis es el de Levene, la información asociada el contraste se resume en la tabla 2.26. La última columna reporta el valor del $p - valor$ asociado al contraste, su valor es 0.039, mayor al nivel de significancia establecido $\alpha = 2\,\%$, en conclusión no existen diferencias significativas al niel el $2\,\%$ para rechazar la hipótesis nula, es decir, la variable dependiente es homocedastica en los grupos definidos por el factor.

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
3.366	3	20	.039

Tabla 2.26: Prueba de Levene

Establecidos los supuestos acerca de la distribución de la variable volumen de ventas, en los grupos definidos por los valores del factor, se procederá a realizar el ANOVA, para establecer la existencia o no de diferencias significativas en el volumen de ventas en los cuatro turnos diarios. Para tal fin es necesario ejecutar la secuencia de comandos siguientes:

```
Analizar --> Comparar Medias --> ANOVA de un factor
  Dependiente: Ventas
  Factor: Turnos
    Post hoc:
     DMS
    Continuar
    Opciones: Gráfico de medias
     Continuar
 Aceptar
```

El reporte asociado a la secuencia de comandos, contiene dos tablas y un gráfico. La primera tabla, ver tabla 2.27 resume la información asociada al ANOVA, el $p - valor$ del estadístico F, asociado al contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \\ H_1 &: \text{ al menos dos diferentes} \end{aligned}$$

es menor que el nivel de significancia $\alpha = 2\,\%$, por tal razón se rechaza la hipótesis nula, es decir, existen diferencias estadísticamente significativas, entre las ventas promedios entre los cuatro turnos, establecidos por la gerencia del hipermercado.

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media Cuadrática	Estadístico F	Sig.
Inter-Grupos	17085643.7	3	5695214.6	-	-
Intra-Grupos	8757536.0	20	437876.8	13.0	.000
Total	25843179.7	23			

Tabla 2.27: ANOVA

Conocida la existencia de diferencias entre las ventas promedios en los cuatro grupos definidos por los niveles del factor, es necesario establecer entre que grupos las diferencias son estadísticamente significativas; las conclusiones acerca de los grupos diferentes se reporta en la tabla 2.28, tabla de comparaciones múltiples.

El turno 2 presenta nivel de ventas promedios superior a todos los demás turnos, ya que la diferencia entre su media y las de los otros turnos, son todas positivas. El primer turno presenta nivel de ventas sin diferencias significativas, estadísticamente, con el turno 3. El volumen de ventas promedio, alcanzado en el turno 2 son todas estadísticamente diferentes a las de los tres turnos restantes. El turno cuatro reporta el menor nivel de ventas, ya que la diferencias de medias para este turno, son todas menores que cero, lo cual corrobora la afirmación de la gerencia del hipermercado.

La información contenida en la tabla de comparaciones múltiples se ilustra en el gráfico de medias figura 2.16.

Efectivamente, el cuarto turno presenta el nivel de Ventas más bajo de los cuatro turnos estudiados, eliminar o no el cuarto turno de operaciones diarias del hipermercado, es una decisión de la gerencia, que puede ser sustentada en el análisis estadístico anterior.

Ejemplo 2.7 *En el consejo administrativo de una entidad Bancario, se ha presentado una creciente preocupación, por la duración de los préstamos para vehículos que sus agentes de ventas conceden a los clientes. Con miras a aclarar la interrogante, se eligen cuatro vendedores al azar y se recoge el número de meses de los préstamos que se han concedido recientemente, con el objetivo de estudiar si las duraciones son muy diferentes de un empleado a otro. La información está contenida en el archivo Venta autos.Sav.*

Este diseño corresponde a un modelo unifactorial, con factor aleatorio. La variable dependiente es el Tiempo en meses concedido al cliente para

					IC al 95 %	
Turno I	Turno J	Diferencia de medias (I-J)	Error Típ.	Sig.	Límite Inferior	Límite superior
Turno 1	Turno2	-1322.42	382.046	.002	-2119.36	-525.49
	Turno 3	-340.59	382.046	.383	-1137.53	46.34
	Turno 4	.26	382.046	.013	242.33	1836.20
Turno 2	Turno 1	1322.42	382.046	.002	525.49	2119.36
	Turno 3	981.83	382.046	.018	184.90	1778.77
	Turno 4	2361.67	382.046	.000	1564.76	3158.62
Turno 3	Turno 1	340.59	382.046	.383	-456.34	1137.52
	Turno 2	-981.833	382.046	.018	-1778.77	-184.90
	Turno 4	1379.85	382.046	.002	582.92	2176.79
Turno 4	Turno1	-1039.26	382.046	.013	-1836.20	-242.33
	Turno 2	-2361.67	382.046	.000	-3158.62	-1564.75
	Turno 3	-1379.85	382.046	.002	-2176.79	-582.92

Tabla 2.28: Comparaciones múltiples

pagar el préstamo, la variable independiente o factor es el agente de ventas, es un factor aleatorio, ya que sólo se han considerado 4 agentes de ventas, como representantes de todos los agentes de ventas que laboran en la entidad Bancario.

El modelo matemático que describe este diseño es de la forma:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, 2, \cdots, 4, j = 1, 2, \cdots, 14$$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha_i &\sim N(0, \sigma_\alpha^2) \\ \varepsilon_{ij} &\sim N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

Al efectuar el contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{distribución normal} \\ H_1 &: \text{distribución no normal} \end{aligned}$$

El reporte obtenido se resume en la tabla :

Es de hacer notar que el test de Shapiro-Wilk garantiza normalidad en los cuatro niveles del factor, mientras que Kolmogorov-Smirnov detecta sólo en tres de los niveles la normalidad. De manera general puede aceptarse la condición de normalidad al nivel del 2 % en todos los niveles del factor.

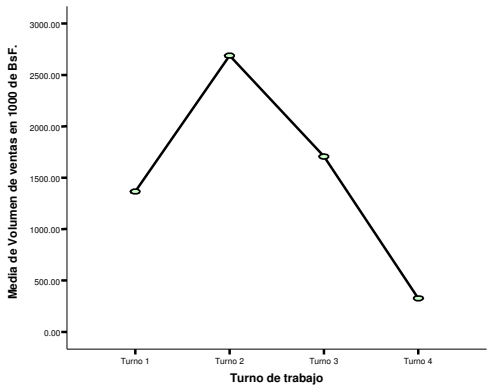

Figura 2.16: Diagrama de medias

		Kolmogorov-Smirnov			Shapiro-Wilk		
	Agente	Valor	GL.	Sig	Valor	GL.	Sig
Meses	1	.215	14	.077	.880	14	.059
	2	.256	14	.014	.874	14	.049
	3	.164	14	.200*	.873	14	.046
	4	.130	14	.200*	.933	14	.339

Tabla 2.29: Prueba de normalidad

Para determinar si los empleados conceden o no el mismo tiempo a los préstamos, se efectuara el contaste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_\alpha^2 = 0 \\ H_0 &: \sigma_\alpha^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Para tal fin es necesario ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar  --> Modelo Lineal General --> Univariado
  Dependiente: Tiempo
    Factores aleatorios: Agente
Aceptar
```

El reporte de la secuencia de comandos se resume en dos tablas.

La tabla 2.30 contiene información acerca del contraste de hipótesis de interés

El valor del estadístico de prueba es $F = 5{,}778$ con un $p - valor$ igual a 0.002, es decir al nivel de significancia del 2 % existen diferencias estaísticamente significativas en los tiempos concedidos para la cancelación de los

Fuente		Suma de Cuadrados Tipo III	GL	Media Cuadrática	F	Sig.
Intersección	Hipótesis	47677.79	1	47677.79	143.66	.001
	Error	995.64	3	331.88		
Agente	Hipótesis	995.64	3	331.88	5.78	.002
	Error	2986.57	52	57.43		

Tabla 2.30: Prueba de efectos inter-sujetos

préstamos, por cada agente. En otras palabras, existen evidencia suficiente para afirmar que los agentes no conceden préstamos para automóviles de la misma duración.

	Componentes de la Varianza		
Fuente	Var(Agente)	Var(Error)	Término Cuadrático
Intersección	14.000	1.000	Intersección
Agente	14.000	1.000	
Error	.000	1.000	

Tabla 2.31: Medias cuadráticas esperadas

La tabla 2.31 reporta las expresiones de las esperanzas de las medias cuadráticas del factor Agentes y del error, respectivamente:

$$\begin{aligned} E(MC_A) &= 14\sigma_\alpha^2 + \sigma^2 \\ E(MC_E) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Estas expresiones se usan para estimar los componentes de la varianza $\sigma_\alpha^2, \sigma^2$, para determinar el valor exacto de cada una de ellas, es necesario ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general
         --> Componentes de la varianza
 Dependiente: Meses
 Factor aleatorio: Agente
   Opciones:
     Modelo ANOVA
     Suma de cuadrados: Tipo III
   Continuar
 Aceptar
```

El reporte de la secuencia de comandos muestra dos tablas, la primera, la tabla 2.32 contiene información relativa a los niveles del factor aleatorio Agentes, en cada nivel del factor se observan 14 casos, para un total de 56 individuos.

		Etiqueta del valor	N
Agente de ventas	1	Agente 1	14
	2	Agente 2	14
	3	Agente 3	14
	4	Agente 4	14

Tabla 2.32: Información niveles del factor

La tabla 2.33 reporta el valor estimado para cada uno de los componentes de la varianza, el valor de la varianza del error es 59.434, mientras que el componente de la varianza asociado al factor es 19.603

Componente	Estimación
Var(Agente)	19.603
Var(Error)	57.434

Tabla 2.33: Estimación de la Varianza

Capítulo 3

Diseños en bloques completamente aleatorizados

3.1. Preliminares

Los diseños de experimentos unifactoriales y factoriales descomponen la fuente de variabilidad en la componente explicada por el modelo o entre grupos y la asociada al error o intragrupos.

Minimizar la variabilidad asociada al error es una las búsquedas más frecuentes en la formulación, diseño y análisis de experimentos. Las dos vertientes más útilies en la minimización de la variabilidad del error son: el bloqueo y el método del sujeto como control propio.

El principio básico del bloqueo consiste en conformar conglomerados homogéneos de individuos o unidades experimentales en función de la puntuación de una o más variables extrañas al tratamiento relevante denominada *Variable de Bloqueo*. Así, los sujetos pertenecientes a cada bloque o conglomerado proceden de un determinado estrato poblacional de origen, con valores similares entre sí, de una característica de interés económico, social, político, psicológico, etc.

Tras la formación de los conglomerados o bloques, en términos de la variable de bloqueo se asignan aleatoriamente los individuos de cada uno de los grupos de diferentes niveles del tratamiento.

De este modo, la técnica de bloqueo supone la aplicación de una restricción aleatoria, los individuos se asignan al azar a los grupos a partir de los bloques de igual manera dentro de cada bloque se forman tantos subgrupos como niveles presente el tratamiento, entonces, cada bloque puede considerarse como un réplica completa del experimento.

Es de hacer notar que, la puntuación del sujeto o unidad experimental en la variable de bloqueo sirve fundamentalmente como criterio de clasificación o adscripción mediante una variable categórica con valores fijos.

El origen de los diseños en bloques al azar, se remonta a 1925 cuando Fisher publica sus primeros trabajos en el área de experimentos agrícola, pero pasado el tiempo, estos diseños han sido aplicados en diferentes áreas del conocimiento como: psicología del comportamiento, psicología clínica, mercadeo, económia, etc.

La principal ventaja de los diseños en bloques al azar, con respecto a los diseños completamente aleatorizados, radica en que un diseño basado en bloques permite estimar con mayor presición el efecto que ejercen las variables independientes sobe la respuesta, como consecuencia de la formación de bloques o conglomerados homogéneos que permiten eliminar la fuente de variabilidad extraña asociada a las propias unidades experimentales, facilitando de esta manera, minimizar la varianza del error experimental.

Partiendo de la definición de los diseños en bloques, este tipo de diseños no asume interacción entre la variable manipulada y la de bloqueo, ya que su finalidad no radica en examinar los efectos de la variable de bloqueo como factor explicativo, si no, en reducir la varianza del error, además, se supone que la variable de bloqueo constituye una fuente de variabilidad estrechamente relacionada con la respuesta, pero de poco interés para el investigador.

3.2. El modelo matemático

El modelo analítico que se utiliza, para el contraste de hipótesis asociado a los diseños en bloques aleatorios, es el análisis factorial de la varianza. Sin embargo, es de hacer notar la existencia de dos estructuras de diseños, en función de las cuales el modelo matemático subyacente a la predicción que se realiza bajo la hipótesis alternativa, se explica mediante expresiones distintas. Los posibles diseños a considerar son:

Diseños de un solo individuo por casillas: los cuales se fundamentan en la no existencia de interacción entre la variable de bloqueo y la variable manipulada, y en caso de existir interacción, ésta coincide con el error experimental, y por tanto, es utilizada como término para el contraste de los efectos del tratamiento.

La ecuación estructural bajo el supuesto de un solo sujeto por casillas, puede ajustarse a dos modelos diferentes:

Modelo aditivo: se basa en el supuesto de no interacción entre la variable de bloqueo y la variable manipulada, responde a la ecuación

de predicción de la forma:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

y_{ijk}**:** es la puntuación del individuo k en el nivel i del tratamiento y nivel j del bloque.

α_i**:** es el efecto del nivel i del bloqueo sobre la respuesta.

β_j**:** es el efecto del nivel j del tratamiento sobre la respuesta.

ε_{ijk}**:** es el error o residuo del modelo lineal, se suponen variables aleatorias independientes, con distribuicón $N(0, \sigma^2)$.

La información generada en un diseño de bloques al azar con un solo individuo por casillas, se puede resumir en la tabla 3.1

		Tratamientos						
		Nivel 1	$\cdots$	Nivel i	$\cdots$	Nivel b	Sumas	Medias
Bloques	Nivel 1	y_{11}	$\cdots$	y_{i1}	$\cdots$	y_{b1}	$Y_{\cdot 1}$	$\overline{Y}_{\cdot 1}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		
	Nivel j	y_{1j}	$\cdots$	y_{ij}	$\cdots$	y_{bj}	$Y_{\cdot j}$	$\overline{Y}_{\cdot j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		
	Nivel t	y_{1t}	$\cdots$	y_{ib}	$\cdots$	y_{bt}	$Y_{\cdot t}$	$\overline{Y}_{\cdot t}$
	Sumas	$Y_{1\cdot}$	$\cdots$	$Y_{i\cdot}$	$\cdots$	$Y_{b\cdot}$	$Y_{\cdot\cdot}$	
	Medias	$\overline{Y}_{1\cdot}$	$\overline{Y}_{2\cdot}$	$\cdots$		$\overline{Y}_{a\cdot}$		$\overline{Y}_{\cdot\cdot}$

Tabla 3.1: Diseños en bloques aleatorios: un caso por casilla

La suma de cuadrados total de las mediciones y_{ij} respecto de la media $\overline{y}_{\cdot\cdot}$ se define como:

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij} - \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2$$

se puede particionar en tres fuentes de variabilidad asociadas a los tratamientos, los bloques y al error experimental, es decir:

$$\begin{aligned} SS_{Total} &= b\sum_{i=1}^{t}(\overline{y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2 + t\sum_{j=1}^{b}(\overline{y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}(Y_{ij} - \overline{y}_{i\cdot} - \overline{y}_{\cdot j} + \overline{Y}_{\cdot\cdot})^2 \end{aligned}$$

donde:

$SS_T = b\sum_{i=1}^{t}(\overline{y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2$**:** mide la variabilidad de los tratamientos medios $\overline{Y}_{i.}$ respecto de la media muestral, son conocidas como suma de cuadrados de los tratamientos.

$SS_B = t\sum_{j=1}^{b}(\overline{y}_{.j} - \overline{Y}_{..})^2$**:** mide la variabilidad entre la media de los bloques $\overline{Y}_{.j}$ y la media poblacional estimada, se conoce como la suma de cuadrados de los bloques.

$SS_E = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{.j} + \overline{Y}_{..})^2$**:** mide la variabilidad de las observaciones sin considerar los bloques ni los tratamientos, es conocida como la suma de cuadrados del error experimental.

En la práctica cuando se realiza el análisis de los datos generados en un diseño de bloques al azar, se utilizan identidades que facilitan el cálculo de las sumas de cuadrados, éstas son:

$$\begin{aligned} SS_{Total} &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t} y_{ij}^2 - C \\ SS_{Tratamientos} &= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} y_{i.}^2 - C \\ SS_{Bloques} &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{t} y_{.j}^2 - C \\ SC_{Error} &= SS_{Total} - SS_{Tratamientos} - SS_{Bloques} \end{aligned}$$

cuando:

$$C = \frac{1}{bt}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t} y_{ij}$$

Los identidades anteriores son similares a las empleadas en los diseños al azar y en diseños factoriales, con las cuales el lector ya debe estar familiarizado.

Las medias cuadráticas estimada para un diseño por bloques se resumen en la tabla 3.2

Los contrastes de hipótesis formulados para los diseños con dos factores aleatorizados pueden establecerse en los diseños por bloques, salvo los contraste para la interacción tratamiento bloques y el efecto del bloque, las cuales no son consideradas de interés en estos diseños. Así, se tiene:

	media cuadrática
Bloque	$\sigma^2 + \frac{t\sum_{i=1}^{b}\alpha_i^2}{b-1}$
Tratamiento	$\sigma^2 + \frac{b\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{t-1}$
Error	σ^2

Tabla 3.2: Medias cudráticas esperadas

Contraste para el tratamiento: permite contrastar el efecto de los niveles del tratamiento sobre la variable respuesta, se expresa como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_t = \mu \\ H_1 &: \mu_j \neq \mu_i \text{ para algún } j \neq j \end{aligned}$$

el cual es equivalente a:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_t = 0 \\ H_1 &: \alpha_j \neq 0 \text{ para algún } j \end{aligned}$$

En cualquiera de estas hipótesis la afirmación a probar es que la respuesta media poblacional lograda con cada tratamiento es la misma para los b tratamientos, y por tanto cada respuesta media μ_i es igual a la media global poblacional μ.
La tabla de ANOVA para diseños en bloques se resumen la tabla 3.3, donde $r = (t-1)(b-1)$.

Fuente de Variabilidad	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media Cuadrática	F	Sig.
Tratamiento	SC_T	$t-1$	MC_T	$F_{obs} = \frac{MC_T}{MC_E}$	p
Bloques	SC_B	$b-1$	MC_B	$F_{obs} = \frac{MC_B}{MC_E}$	p
Error	SC_E	r	MC_E		
Total	SC_{Total}	$bt-1$			

Tabla 3.3: ANOVA: diseños en bloques

El estadístico de prueba se define como:

$$F = \frac{MC_T}{MC_E} \sim F_{(t-1),(t-1)(k-1)}$$

La decisión de contraste se toma en términos del $p - valor$ asociado y del nivel de significancia α fijado por el investigador.

Modelo no aditivo: cuando los datos del experimento no se ajustan a un modelo aditivo, ya que, el valor esperado del error o residuos del modelo lineal no es nulo, entonces se puede definir los residuos como:

$$\varepsilon_{ijk} = \gamma_{ijk} + \eta_{ijk}$$

donde:

γ_{ijk}**:** es el componente no aditivo o componente de Tukey que recoge el supuesto de que el efecto de la variable bloqueo β_j se combina con el efecto del tratamiento α_i siguiendo una relación multiplicativa y no aditiva.

η_{ijk}**:** es el término residual del modelo con valor esperado nulo.

En fin, cuando no se puede afirmar que la interacción entre la variable manipulada y la de bloqueo es nula; el modelo más adecuado es un modelo no aditivo de la forma:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ijk} + \eta_{ijk}$$

cuyos términos fueron descritos anteriormente.

Diseños con más de un sujeto por casillas: este tipo de diseños se formulan bajo el supuesto de la existencia de posibles interacciones entre las variables de bloqueo y la manipulada y el término del error de forma independiente. El modelo de predicción se expresa como:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

y_{ijk}**:** es la puntuación del individuo k en el nivel i del tratamiento y nivel j del bloque.

α_i**:** es el efecto del nivel i del tratamiento sobre la respuesta.

β_j**:** es el efecto del nivel j del bloqueo sobre la respuesta.

$(\alpha\beta)_{ij}$**:** es el efecto debido a la interacción del nivel i del bloque con el factor j del tratamiento sobre la puntuación k de la variable respuesta.

ε_{ijk}**:** es el error o residuo del modelo lineal, se suponen variables aleatorias independientes, con distribuicón $N(0, \sigma^2)$.

Ya que, en este tipo de diseños, se disponen de más de una observación o sujeto por casillas, es posible calcular el componente residual del modelo, y la interacción entre la variable manipulada y la de bloqueo, no se

confunden con el término del error. La solución analítica es idéntica a la del diseño factorial de dos factores, salvo que en los diseños factoriales con dos factores ambas variables independientes son factores experimentales, mientras que en los diseños con bloqueo aleatorizado, una de las variables independientes o factores es una variable de clasificación.

La información generada en un diseño de bloques al azar con más de un individuo por casillas, se puede resumir en una tabla de la forma:

		Tratamientos					
		Nivel 1	$\cdots$	Nivel i	$\cdots$	Nivel a	Medias
Bloques	Nivel 1	y_{111}	$\cdots$	y_{i11}	$\cdots$	y_{a11}	$\overline{Y}_{\cdot 1\cdot}$
		y_{11k}	$\cdots$	y_{i1k}	$\cdots$	y_{a1k}	
		y_{11n}	$\cdots$	y_{i1n}	$\cdots$	y_{a1n}	
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	Nivel j	y_{1j1}	$\cdots$	y_{ij1}	$\cdots$	y_{aj1}	$\overline{Y}_{\cdot j\cdot}$
		y_{1jk}	$\cdots$	y_{ijk}	$\cdots$	y_{ajk}	
		y_{1jn}	$\cdots$	y_{ijn}	$\cdots$	y_{ajn}	
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	Nivel b	y_{1b1}	$\cdots$	y_{ib1}	$\cdots$	y_{ab1}	$\overline{Y}_{\cdot b\cdot}$
		y_{1bk}	$\cdots$	y_{ibk}	$\cdots$	y_{abk}	
		y_{1bn}	$\cdots$	y_{ibn}	$\cdots$	y_{abn}	
	Medias	$\overline{Y}_{1\cdot\cdot}$	$\cdots$	$\overline{Y}_{i\cdot\cdot}$	$\cdots$	$\overline{Y}_{a\cdot\cdot}$	$\overline{Y}_{\cdots}$

Tabla 3.4: Diseños en bloques aleatorios: más de una observación por casilla

Bajo los supuestos $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$, la tabla del análisis de la varianza para un diseño por bloques aleatorizados se resume en la tabla 3.5. Cuando $r = (a-1)(b-2)$.

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Medias Cuadrática	Estadístico F	Sig.
Bloque	SC_A	$a-1$	MC_A		
Tratamientos	SC_T	$b-1$	MC_T	$F = \frac{MC_T}{MC_E}$	p
Error	SC_E	r	MC_E		
Total	SC_T	$ab-1$			

Tabla 3.5: ANOVA: Diseño en bloques varios sujetos por casillas

Los contrastes de hipótesis asociados a este tipo de diseños son los formulados para diseños bifactoriales con interacción entre los factores.

3.2.1. Eficiencia relativa

Los diseños en bloque son utilizados para minimizar la variabilidad del error experimental, pero, que tan eficiente es un diseño en bloques respecto de un diseño completamente al azar.

Sean MCE_{DA} y MCE_{BA} la media cuadrática del error experimental para un diseño al azar y un diseño en bloques respectivamente. Una medida de la precisión para los dos tipos de diseños es la varianza de las $\overline{Y}_{i.}$, la media del tratamiento $i = 1, 2, \cdots, t$. Así, para los diseños en bloques la estimación de las varianzas de las $\overline{Y}_{i.}$ se define como: $\frac{MCE_{DB}}{b}$, mientras que en los diseños aleatorios al azar, es $\frac{MCE_{DA}}{r}$, las cuales satisfacen la relación:

$$\frac{MCE_{DA}}{r} = \frac{MCE_{DB}}{b} \Longleftrightarrow \frac{r}{b} = \frac{MCE_{DA}}{MCE_{DB}}$$

El cociente $\frac{r}{b}$ se conoce como la *Eficiencia relativa* del diseño en bloques; y mide las observaciones por cada tratamiento requeridas en un diseño aleatorio al azar para obtener la misma precisión que se obtiene para los tratamientos usando diseños en bloques.

Usando la media cuadrática del análisis de la varianza para diseños en bloque, podemos expresar la eficiencia relativa como:

$$ER = \frac{r}{b} = \frac{MCE_{DA}}{MCE_{DB}} = \frac{(b-1)MC_T + b(t-1)MC_E}{b(t-1)MC_E}$$

- si $MCE_{BA} > MCE_{DA}$, es decir $ER > 1$, entonces se concluye que es mejor usar diseños en bloques
- si $MCE_{BA} \leq MCE_{DA}$, es decir $ER \leq 1$, entonces se concluye que es mejor usar diseños completamente al azar

Ejemplo 3.1 *Un experimento fue aplicado para comparar el efecto de tres insecticidas diferentes sobre una variedad de frijol. Cuatro parcelas fueron preparadas cada parcela se subdividió en tres hileras o filas. Las filas se separaron una distancia prudencial dentro de cada parcela. En cada hilera se plantaron 100 semillas y sobre ellas se aplicó el insecticida asignado a la hilera, los insecticidas fueron asignados al azar a cada hilera, de manera tal que, cada insecticida fue utilizado en una hilera en todas las cuatro parcelas. La respuesta de interés es el número de semillas germinadas por cada hilera.*

La información obtenida del experimento se resume en la tabla 3.6

1. *Describir el diseño experimental*

	Parcelas				
Insecticidas	1	2	3	4	sumas
1	56	49	65	60	230
2	84	78	94	93	349
3	80	72	83	85	320
Sumas	220	199	242	238	899

Tabla 3.6: Datos

2. *Aplicar un ANOVA para comparar los tres insecticidas al nivel de significancia del 5 %*

3. *Estimar la eficiencia relativa del diseño en bloques respecto a un diseño completamente al azar*

Se está en presencia de un diseño en bloques al azar con cuatro bloques (parcelas) y tres tratamientos (insecticidas) por bloque. El modelo matemático más adecuado al diseño experimental es:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

cuando $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, además las $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ independientes.

A partir de los datos se tiene:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} y_{ij} = 899, \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} y_{ij}^2 = 69685$$

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_{i.}^2 = 69273{,}25, \quad \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} y_{.j}^2 = 67736{,}33$$

$$C = \frac{Y_{..}^2}{12} = \frac{(899)^2}{12} = 67350{,}08$$

Luego las sumas de cuadrados son:

$$\begin{aligned} SS_{Total} &= 69685 - 67350{,}08 = 2334{,}92 \\ SS_{Tratamiento} &= 69736{,}33 - 67350{,}08 = 1925{,}17 \\ SS_{Bloque} &= 67736{,}33 - 67350{,}08 - 386{,}25 \\ SS_{Error} &= 2334{,}92 - 1925{,}17 - 386{,}08 = 23{,}25 \end{aligned}$$

La tabla de ANOVA para el diseño de interés se resume a continuación:

Fuente	SS	GL	MC	F
Tratamientos	1925.17	2	962.51	245.56
Bloques	386.25	3	128.75	32.84
Error	23.50	6	3.92	
Total	2334.92	11		

Tabla 3.7: ANOVA bloques al azar

Los estimadores del modelo son:

$$\widehat{\mu} = 74{,}92 \quad \widehat{\alpha}_1 = 76{,}67 \quad \widehat{\alpha}_2 = 116{,}33 \quad \widehat{\alpha}_3 = 106{,}67$$
$$\widehat{\beta}_1 = 55 \quad \widehat{\beta}_2 = 49{,}75 \quad \widehat{\beta}_3 = 60{,}5 \quad \widehat{\beta}_4 = 59{,}5$$
$$\widehat{\sigma}^2 = 3{,}92$$

La información resumida en la tabla de ANOVA para diseños en bloques al azar, permite efectuar los contrastes relacionados con el modelo matemáticos.

Contraste para los tratamientos: para conocer el efecto o no de los tratamientos, insecticidas, sobre el número de semillas de frijol germinadas, se realiza el contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \\ H_1 &: \text{al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Como $F_{2,6,0{\cdot}05} = 5{,}14 < F_{observado} = 245{,}56$ se rechaza la hipótesis nula H_0 al nivel e significancia del 5 %, es decir, el número de semillas germinadas depende del insecticida empleado.

Contrastes para los bloques: aun cuando los contraste acerca de los bloques no son de gran importancia, serán considerados a continuación. El contraste sobre los efectos de los bloques se formulan como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \\ H_1 &: \text{al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Como $F_{3,6,0{\cdot}05} = 4{,}76 < F_{observado} = 32{,}646$ se rechaza la hipótesis nula H_0 al nivel e significancia del 5 %, es decir, el número de semillas germinadas depende de la parcela en la cual fueron plantadas.

La eficiencia relativa del diseño en bloques respecto a su equivalente completamente al azar es:

$$\begin{aligned} ER &= \frac{(b-1)MC_{Tratamiento} + b(t-1)MCError}{b(t-1)MCError} \\ &= \frac{3 * 128{,}75 + 4 * 3 * 9{,}32}{4 * 3 * 9{,}32} = 4{,}45 \end{aligned}$$

Dado que, la eficiencia relativa del diseño en bloques respecto al diseño completamente al azar es igual a 4.45, es decir se necesitan aproximadamente 4 observaciones por cada tratamiento en un diseño completamente al azar para obtener la misma precisión de la información de un diseño en bloques.

3.3. Diseño de cuadrado latino

El diseño en cuadrados latinos aquel en el que se tienen en cuenta tres factores, con la particularidad de que los tres factores tienen el mismo número de niveles. Dos de los factores operan como bloques con el fin de reducir los errores experimentales. El objetivo del análisis es determinar si el tercer factor *Factor de tratamiento*, tiene o no influencia significativa sobre la variable respuesta. En un diseño cuadrado latino existe una única observación por casilla, por lo que en ningún caso es posible tratar efectos de interacción.

En el diseño en cuadrado latino existen dos factores en bloque, a diferencia del diseño de bloques al azar, en el que sólo existe un factor de bloque. Otra característica diferenciadora del diseño en cuadrado latino es que los dos factores del bloque, así, como el factor de tratamiento, tienen el mismo número de grupos o niveles.

El dise no en cuadrado latino (diseños cuadrados latinos) se usa para eliminar dos fuentes de variabilidad, es decir, permite hacer la formación de bloques sistemática en dos direcciones. Por lo tanto, las filas y las columnas representan en realidad dos restricciones sobre la aleatorización.

De esta forma, se llama cuadro latino a un arreglo experimental obtenido a partir de una matriz cuadrada $t \times t$ en la que aparecen t elementos diferentes dados, de tal forma que cada fila y cada columna, contenga una sola vez cada uno de los elementos en consideración. Cada una de las t^2 celdas resultantes contiene una de las t letras que corresponde a los tratamientos, y cada letra ocurre una y sólo una vez en cada fila y columna.

Algunos de los cuadrados latinos son:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \\ C & D & A & B \\ D & A & B & C \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ B & C & D & E & A \\ C & D & E & A & B \\ D & E & A & B & C \\ E & A & B & C & D \end{bmatrix}$$

Una de las ventajas del diseños cuadrados latinos es que al hacer el control local en dos direcciones, se tiene un mayor control en la variación, resultando la MCE más peque no que cuando se usa diseños completamente al azar o diseños en bloques completamente al azar.

Sin embargo, esta clase de experimento presenta algunas desventajas, como son:

- El número de tratamientos se límita al número de filas y al número de columnas.
- Si $t \geq 10$ no es recomendable el uso de cuadros latinos, pués el número de unidades experimentales se incrementa notablemente a medida que t aumenta.

Para la construcción del diseños cuadrados latinos, Fisher y Yates dan las siguientes definiciones:

1. Cuadro latino estándar: si la primera fila y la primera columna son ordenadas alfabéticamente, hay muchos cuadros latinos estándar de orden $t \times t$
2. Cuadro latino conjugado: dos cuadros latinos son conjugados si las filas de uno son las columnas del otro.
3. Cuadro latino conjugado en sí, mismo: si el arreglo por filas y columnas es el mismo.

Para un diseños cuadrados latinos 2×2 hay solamente un cuadro latino estándar:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$$

En un diseños cuadrados latinos 3×3, también hay solo un cuadro latino estándar:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix}$$

Hay doce posibles formas de arreglar un cuadro latino 3×3:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & C & B \\ B & A & C \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & C & B \\ C & B & A \\ B & A & C \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B & A & C \\ C & B & A \\ A & C & B \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B & A & C \\ A & C & B \\ C & B & A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C & B & A \\ A & C & B \\ B & A & C \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C & B & A \\ B & A & C \\ A & C & B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B & C & A \\ C & A & B \\ A & B & C \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B & C & A \\ A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C & A & B \\ A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C & A & B \\ B & C & A \\ A & C & B \end{bmatrix}$$

Para un cuadro latino de orden t el número total de cuadros es obtenido de multiplicar el número de cuadros latinos estándares por $t!(t-1)!$.

En la tabla 3.8 se resumen algunos de los resultados anteriores acerca de los cuadrados latinos estándares y no estándares.

Tamaño	# de CL estándar	Total de CL
2×2	1	2
3×3	1	12
4×4	4	576
5×5	56	161280
6×6	9408	818851200
7×7	169212080	61479419904000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t \times t$	$\cdots$	$t!(t-1)!$(# CL estándar)

Tabla 3.8: Posibles cuadrados latinos

El modelo que puede establecerse en este caso es el siguiente:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk} \qquad i, j, k = 1, 2, \cdots, a$$

donde:

Y_{ijk}**:** es el valor de la respuesta sobre el tratamiento k en la fila i y la columna j.

μ**:** la media poblacional sin considerar niveles de tratamientos ni de bloques.

α_i**:** efecto del tratamiento i de los tratamientos sobre la variable respuesta Y.

β_j**:** efecto de la fila j del primer bloque sobre la respuesta Y.

γ_k**:** efecto e la columna k o nivel del segundo factor sobre la respuesta Y.

ε_{ijk}**:** es el residuo aleatorio del modelo linea, son variables aleatorias independencies con distribución común $N(0, \sigma^2)$.

El conjunto de ecuaciones normales obtenidas con el procedimiento de estimación de mínimos cuadrados es:

$$\begin{aligned} a^2\widehat{\mu} + t\left(\sum_{i=1}^{t}\widehat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{t}\widehat{\beta}_j + \sum_{k=1}^{t}\widehat{\gamma}_k\right) &= Y_{...} \\ a\widehat{\mu} + a\widehat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{t}\widehat{\beta}_j + \sum_{k=1}^{t}\widehat{\gamma}_k &= Y_{i..} \\ a\widehat{\mu} + \sum_{i=1}^{t}\widehat{\alpha}_i + a\widehat{\beta}_j + \sum_{k=1}^{t}\widehat{\gamma}_k &= Y_{.j.} \\ a\widehat{\mu} + \sum_{i=1}^{t}\widehat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^{t}\widehat{\beta}_j + a\widehat{\gamma}_k &= Y_{..k} \end{aligned}$$

Bajo los supuestos $\sum_{i=1}^{t}\alpha_i = \sum_{j=1}^{t}\beta_j = \sum_{k=1}^{t}\gamma_k = 0$, se encuentra las siguientes estimaciones de los parámetros:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu} &= \overline{Y}_{...} & \widehat{\alpha}_i &= \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...} \\ \widehat{\beta}_j &= \overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...} & \widehat{\gamma}_k &= \overline{Y}_{..k} - \overline{Y}_{...} \\ \widehat{\sigma}^2 &= MC_E \end{aligned}$$

De acuerdo a este modelo, la variabilidad total presente en los datos se puede descomponer como:

$$SS_{Total} = SS_T + SS_{B_1} + SS_{B_2} + SS_E$$

Donde:

$$\begin{aligned} SS_{Total} &= \sum_{ijk}(y_{ijk} - \overline{Y}_{...})^2 \\ SS_{B_1} &= t\sum_{i=1}^{t}(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...})^2 \\ SS_{B_2} &= t\sum_{j=1}^{t}(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SS_T &= t\sum_{k=1}^{t}(\overline{Y}_{..k} - \overline{Y}_{...})^2 \\ SS_E &= \sum_{ijk}(y_{ijk} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{..k} + 2\overline{Y}_{...})^2 \end{aligned}$$

En la práctica cuando se realiza el análisis de los datos generados en un diseño de bloques al azar, se utilizan identidades que facilitan el cálculo de las sumas de cuadrados, éstas son:

$$\begin{aligned} SS_{Total} &= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{t} y_{ijk}^2 - C \\ SS_{Tratamientos} &= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} y_{i..}^2 - C \\ SS_{Bloques1} &= \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} y_{.j.}^2 - C \\ SS_{Bloques2} &= \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t} y_{..k}^2 - C \\ SC_{Error} &= SS_{Total} - SS_{Tratamientos} - SS_{Bloques1} - SS_{Bloques2} \end{aligned}$$

cuando:

$$C = \frac{1}{t^3}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{t} y_{ij}$$

Las cuales son una extensión a las usadas en diseños en bloques al azar.

La tabla del análisis de la varianza para un diseño cuadrado latino $t \times t$ quedará expresado como:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Medias Cuadrática	Estadístico F	Sig.
Filas	SC_{B_1}	$t-1$	MC_{B_1}		
Columnas	SC_{B_2}	$t-1$	MC_{B_2}	$F = \frac{MC_T}{MC_E}$	p
Tratamientos	SC_T	$t-1$	MC_T		
Error	SC_E	u	MC_E		
Total	SC_{Total}	t^2-1			

Tabla 3.9: ANOVA: cuadrados latinos

	Medias cuadráticas
Filas	$\sigma^2 + \frac{t}{t-1}\sum_{i=1}^{t}\alpha_i^2$
Columnas	$\sigma^2 + \frac{t}{t-1}\sum_{j=1}^{t}\beta_j^2$
Tratamiento	$\sigma^2 + \frac{t}{t-1}\sum_{k=1}^{t}\gamma_k^2$
Error	σ^2

Tabla 3.10: Medias cuadráticas esperadas

Cuando $u = (t-1)(t-2)$. De igual manera, las medias cuadráticas esperadas bajo el modelo lineal son: además:

$$\begin{aligned} E(y_{ijk}) &= \mu = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k \\ Var(y_{ijk}) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

En el diseño cuadrados latinos pueden especificarse contrastes de hipóteis a cerca de los diferentes parámetros del modelo lineal, en particular:

Contraste para los tratamientos: se parte del supuesto que el efecto de los niveles del tratamiento son nulos, expresado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_t = 0 \\ H_1 &: \alpha_j \neq 0 \text{ para algún } j \end{aligned}$$

El estadístico de prueba bajo H_0 se define como:

$$F = \frac{MC_T}{MC_E} \sim F_{(t-1),(t-1)(t-2)}$$

Contraste para las fila: se parte del supuesto que el efecto de los niveles del bloque filas son nulos, expresado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_t = 0 \\ H_1 &: \beta_j \neq 0 \text{ para algún } j \end{aligned}$$

El estadístico de prueba bajo H_0 se define como:

$$F = \frac{MC_{B_1}}{MC_E} \sim F_{(t-1),(t-1)(t-2)}$$

Contraste para las columnas: se parte del supuesto que el efecto de los niveles del bloque columnas son nulos, expresado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_t = 0 \\ H_1 &: \gamma_j \neq 0 \text{ para algún } j \end{aligned}$$

El estadístico de prueba bajo H_0 se define como:

$$F = \frac{MC_{B_2}}{MC_E} \sim F_{(t-1),(t-1)(t-2)}$$

La regla de decisión se construye usando el $p - valor$ asociado al contraste y el nivel de significancia α establecido por el investigador.

3.3.1. Eficiencia relativa

Al igual que en los diseños en bloques al azar, se puede estimar la eficiencia relativa de los diseños en cuadrados latinos con respecto a diseños completamente al azar. Si MC_{ECA} y MC_{ECL} son las medias cuadráticas del error de los diseños completamente al azar y en cuadrados latinos, respectivamente, la eficiencia relativa es:

$$ER = \frac{MC_{ECA}}{MC_{ECL}} = \frac{MC_{B_1} + MC_{B_2} + (t-1))MC_E}{(t+1)MC_E}$$

Ejemplo 3.2 *El planificador de tránsito terrestre de una ciudad desea comparar las diferencias en el tiempo total verde inactivo, es decir, el tiempo que transcurre en luz verde un semáforo sin que transmite vehículos; en cuatro cruces críticos de la ciudad. Además, de comparar las diferencias en el tiempo, desea comparar las diferencias en cuatro momentos del día: momentos críticos en la mañana y en la tarde, momentos normales en la mañana y en la tarde. Para tal fin seleccionó un diseño cuadrados latinos de la forma:*

	Período de tiempo			
Cruce	Am. Normal	Am. Crítico	Pm. Normal	Pm. Crítico
1	IV	II	III	I
2	II	III	I	IV
3	III	I	IV	II
4	I	IV	II	III

Tabla 3.11: Diseño Cuadrado latino

	Período de tiempo								
Cruce	Am.	Normal	Am.	Crítico	Pm.	Normal	Pm.	Crítico	Totales
1	IV	15.5	II	33.9	III	13.2	I	2.91	91.7
2	II	16.3	III	26.6	I	19.4	IV	22.8	85.1
3	III	10.8	I	31.1	IV	17.1	II	30.3	89.3
4	I	14.7	IV	34.0	II	19.7	III	21.6	90.0
Total		57.3		125.6		69.4		103.8	356.1

Tabla 3.12: Datos

Cumplido el proceso de aleatorización y control de la información, los datos generados del diseño experimental se resumen en la tabla siguiente:

Realizar el análisis estadístico de los datos.

A partir de los datos aportados por el investigador, se presenta un diseño en cuadrados latinos con dos factores de bloqueo, un factor tratamientos y una variable de respuesta, el cual se puede modelar mediante:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

Los totales asociados al modelo son:

$$\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 = 8801{,}05 \qquad \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk} = 89{,}4$$

$$\sum_i y_{i..}^2 = 32137{,}73 \qquad \sum_j y_{.j.}^2 = 7931{,}35$$

$$\sum_k y_{..k}^2 = 8662{,}36 \qquad C = 7925{,}45$$

Mientras que, las sumas de cuadrados son:

$$\begin{aligned} SS_{Total} &= 8801{,}05 - 7925{,}45 = 875{,}60 \\ SS_{Tratamiento} &= 7925,45 - 7925{,}45 = 108{,}96 \\ SS_{Bloque1} &= 7931{,}35 - 7925{,}45 = 5{,}9 \\ SS_{Bloque2} &= 8662{,}36 - 7925{,}45 = 736{,}91 \\ SS_{Error} &= 875{,}6 - 108{,}98 - 5{,}9 - 736{,}91 = 23{,}81 \end{aligned}$$

La tabla de ANOVA que permite analizar el diseño se resume como:

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F
Tratamiento	108.98	3	36.33	9.15
Bloque1	5.90	3	1.97	0.50
Bloque2	736.91	3	245.64	61.87
Error	3.81	6	3.97	
Total	875.6	15		

Tabla 3.13: ANOVA cuadrados latinos

Dado que $F_{3,6,0{\cdot}05} = 4{,}76$ es mayor al valor del estadístico de prueba para los períodos del día considerados en el estudio, se concluye que existen diferencias significativas al nivel del 5 % en los tiempos verdes.

La eficiencia relativa del diseño en cuadrados latinos respecto a un diseño completamente al azar, está dada por:

$$ER = \frac{1{,}97 + 245{,}64 + 3 * 3{,}97}{5 * 3{,}97} = 13{,}67$$

es decir, se necesitan aproximadamente 13 observaciones en un diseño completamente al azar, para obtener los mismos resultados generados en el diseño cuadrados latinos.

3.4. Diseño de cuadrados grecolatinos

Al usar el cuadrado latino es posible remover dos fuentes de variación del error experimental mediante el uso de clasificaciones en filas y columnas de las unidades experimentales. Se puede avanzar otra etapa y controlar una nueva fuente de variación, usando el dise no en **Cuadrado Greco-Latino (DCGL)**.

Considérense dos cuadros latinos de 4×4:

$$\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \end{bmatrix}$$

Al superponer éstos dos cuadros, se tiene un arreglo en DCGL como el que se presenta

$$\begin{bmatrix} A\alpha & B\beta & C\gamma & D\delta \\ B\gamma & A\delta & D\alpha & C\beta \\ C\delta & D\gamma & A\beta & B\alpha \\ D\beta & C\alpha & B\delta & A\gamma \end{bmatrix}$$

Se puede verificar que cada elemento del primer cuadro latino (A, por ejemplo) ocurre junto con cada uno de los elementos del segundo $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ y recíprocamente, cada elemento de la segunda matriz (β por ejemplo) ocurre con cada uno de los elementos del primero (A, B, C, D). Aquellos cuadros latinos que cumplen ésta propiedad se dicen ortogonales o también son llamados DCGL.

Surgen luego algunas preguntas:

1. Cuántos cuadros latinos ortogonales existen para cada caso ?

2. Cómo se pueden obtener éstos cuadros latinos?

En el DCGL las unidades experimentales se agrupan en tres formas diferentes; así como sucedió con el diseños cuadrados latinos, un dise no de t tratamientos necesita t^2 unidades experimentales. Estas se agrupan en filas y columnas, y una clasificación adicional que se designan mediante letras griegas. La asignación o distribución de las letras griegas está restringida en forma tal que cada letra griega debe ir una vez, y sólo una vez, en cada fila y en cada columna. Así, las letras griegas forman un cuadro latino con respecto a filas y columnas. Los tratamientos, designados mediante letras latinas, ahora se asignan a las unidades experimentales de manera tal que cada tratamiento ocurre una sóla vez, en cada fila, en cada columna y en cada letra griega.

La principal ventaja es que permite controlar la variabilidad de tres fuentes de variación. Mientras, una desventaja de este dise no es que la pérdida de datos complica a menudo el análisis. Se pueden construir cuadrados grecolatinos para todo número de tratamientos mayores o iguales a 3 excepto para 6. Teóricamente, es posible utilizar estos dise nos para cualquier t, siempre y cuando t sea un número primo o la potencia de un número primo.

El modelo estadístico para este dise no es:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \eta_l + \varepsilon_{ijkl} \quad i, j, k, l = 1, 2 \cdots, a$$

Donde:

y_{ijkl}**:** la observación de la variable respuesta en el nivel i del tratamiento y los niveles j, k, l de los bloques.

μ**:** media global de la respuesta sin considerar bloques ni tratamientos.

α_i**:** efecto del nivel i del bloque latino sobre la variable dependiente.

β_j**:** efecto del nivel j del bloque filas sobre la variable respuesta Y.

γ_l**:** efecto del nivel l del bloque columna filas sobre la variable respuesta Y.

η_k**:** efecto del nivel k del bloque griego filas sobre la variable respuesta Y.

ε_{ijkl}**:** residuos aleatorios del modelo lineal, se distribuyen $N(0, \sigma^2)$ independientes.

El análisis es muy parecido al del diseños cuadrados latinos. Por lo tanto, puede calcularse una suma de cuadrados debida al factor de las letras griegas a partir de los totales de las letras griegas y el error experimental se reduce adicionalmente en esta cantidad.

Las fórmulas simplificadas para el cálculo de las sumas de cuadrados de las fuentes de variabilidad asociadas al modelo de diseños greco latinos, son:

$$\begin{aligned}
SS_{Total} &= \sum_{ijkl} y^2_{ijkl} - C \\
SS_{Filas} &= \frac{1}{a} \sum_{i} y^2_{i..} - C \\
SS_{Columnas} &= \frac{1}{a} \sum_{l} y^2_{...l} - C \\
SS_{Griego} &= \frac{1}{a} \sum_{j} y^2_{.j..} - C \\
SS_{Latino} &= \frac{1}{a} \sum_{k} y^2_{...k} - C \\
SS_{Error} &= SS_{Total} - SS_{Filas} - SS_{Columnas} - SS_{Griego} - SS_{Latino} \\
C &= \frac{y^2_{....}}{a^2}
\end{aligned}$$

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Medias Cuadrática	Estadístico F	sig.
Filas	SS_F	$a-1$	$\frac{SS_F}{a-1}$		
Columnas	SS_{Colum}	$a-1$	$\frac{SS_{Colum}}{a-1}$		
Trata latinos	SS_{TL}	$a-1$	$\frac{SS_{TL}}{a-1}$	$\frac{MC_{TL}}{MC_E}$	p
Trata Griegas	SS_{TG}	$a-1$	$\frac{SS_{TG}}{a-1}$	$\frac{MC_{TG}}{MC_E}$	p
Error	SS_E	r	$\frac{SS_E}{(a-1)(a-3)}$		
Total	SS_{Total}	a^2-1			

Tabla 3.14: AMOVA cuadrados grecolatinos

La tabla de ANOVA para un diseño grecolatino se resumen en la tabla 3.14 cuando $r = (a-1)(a-3)$.

La hipótesis nula de igualdad de tratamientos de letras latinas y griegas, se prueba dividiendo el cuadrado medio correspondiente por el cuadrado medio del error, cuyo valor se compará con una $F_{(a-1);(a-3)(a-1);\alpha}$.

También puede probarse la ausencia de efectos de las filas o columnas formando el cociente de MC_{Filas} o MC_{Column}, respectivamente, con MC_E. Sin embargo, al igual que en diseños cuadrados latinos, puesto que las filas y las columnas representan restricciones sobre la aleatorización, estas pruebas no son apropiadas.

Puede hacerse cierta ampliación del concepto de un cuadrado grecolatino. Un hipercuadrado $a \times a$ es un dise no en el que superpone tres o más cuadrados latinos ortogonales $a \times a$. En general, hasta $a+1$ factores podrán estudiarse si se dispone de un conjunto de $a-1$ cuadrados latinos ortogonales. En este dise no se utilizan todos los $(a+1)(a-1) = a^2-1$ grados de libertad, por lo que se necesita una estimación independiente de la varianza del error. Desde luego, no deben existir las interacciones entre los factores cuando se usan hipercuadrados.

3.5. Uso del SPSS

Los diseños en bloques con más de una observación por celda pueden resolverse usando SPSS, de la misma manera que los diseños factoriales, estudiados en el capítulo anterior, para diseños con una unidad experimental por casilla los procedimientos son similares, pero con variantes simples, las cuales serán consideradas a continuación. Diseños en bloques con SPSS una unidad por casilla, este tipo de diseños puede ser análisado empleando los recursos considerados para diseños con dos factores, los procedimientos son

los estudiados con anterioridad. Los diseños cuadrados latinos se estudian usando las técnicas descritas para diseños factoriales con tres factores, salvo que en este caso no existen interacciones de interés.

Para Diseños grecolatinos con SPSS los campos y procedimientos seleccionados en SPSS para el análisis de diseños grecolatinos, son similares a los estudiados en los diseños cuadrados latinos, salvo que en este tipo de diseños se consideran tres factores de bloqueo y un factor de tratamientos.

Dado que el interés del investigador está centrado en los efectos de primer orden de los tratamientos y de las variables de bloqueo, las interacciones de orden superior son descartada, lo cual facilita el cálculo y análisis de los resultados.

La secuencia de comandos asociada a este procedimiento es:

```
Analizar --> Modelo Lineal General --> Univariado
```

en la caja de diálogo asociada se seleccionan la variable dependiente y los tres factores, ya sean los tres fijos o aleatorios. ver figura 3.1

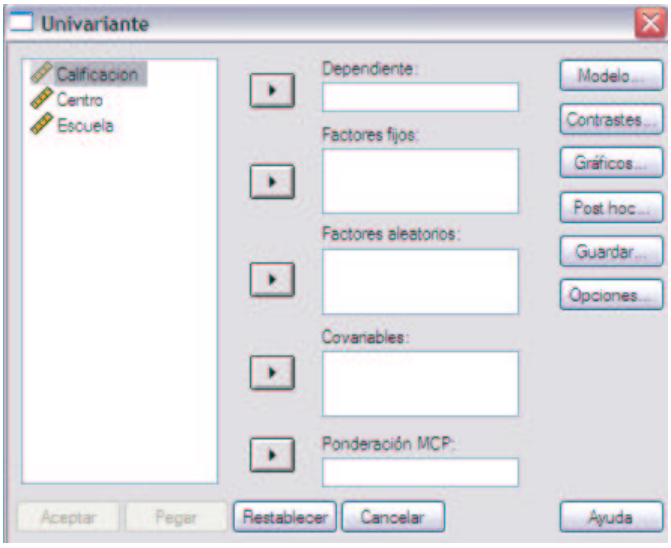

Figura 3.1: Dos factores: Bloques

Los campos de interés en la caja de diálogo anterior, son conocidos por el lector, ya que su descripción se realizó en el estudio de diseños factoriales completos. En particular, serán considerado los Campos *Modelo* y *Opciones*, dada la aplicación de ellos al tema estudiado.

Al ejecutar el campo **Modelo** se activa la caja de diálogo ilustrada en la figura 3.2

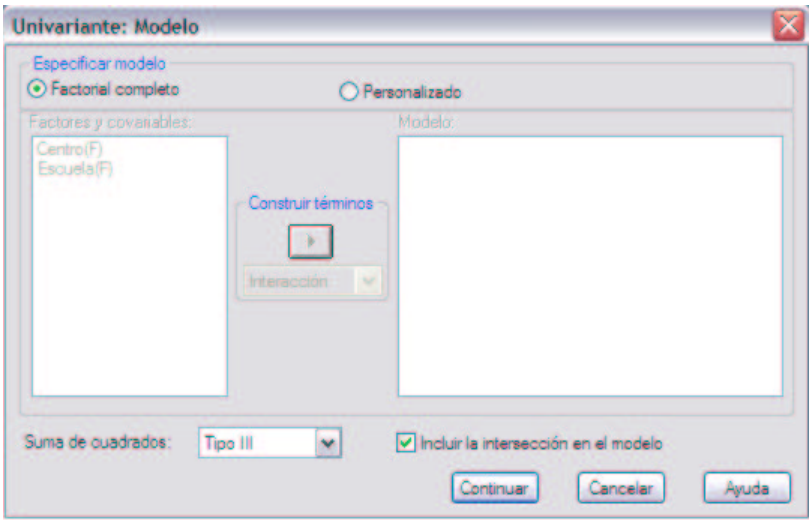

Figura 3.2: Dos factores: Bloques Modelo

La opción por defecto en esta caja de diálogo es *Modelo Completo*, el cual permite construir diseños factoriales considerando todas las interacciones de los diferentes factores, pero en el caso de diseños en bloques al azar, cuadrados latinos o cuadrados greco-latinos, se debe cambiar a *Modelo Personalizado*, a continuación se ejecuta el campo *Construir términos* y seleccionar la opción *Efectos Principales* en el menú desplegable, ya que, como ha sido mencionada anteriormente, el investigador sólo está interesados en los efectos de primer orden o efectos principales, de los tratamientos y las variables de bloqueo que definen el diseño.

Seguidamente, se deben seleccionar los factores que definen el modelo, escogidos los tres factores de interés: los dos del bloqueo y el de tratamientos, y trasladarlos al campo *Modelo*. Seleccione la opción *Suma de cuadrados: Tipo III*. Al ejecutar el campo **Continuar** se regresa a la caja de diálogo principal del procedimiento.

Al ejecutar el comando *Opciones* se activa la caja de diálogo ilustrada en la figura 3.3

Para cualquier tipo de los diseños en bloque, ya sea bloques al azar, cuadrados latinos o greco-latinos, en esta caja de diálogo se seleccionan las opciones de interés para el investigador, entre otras *Mostrar medias marginales, estimación del tamaño del efecto, Potencia observada.*

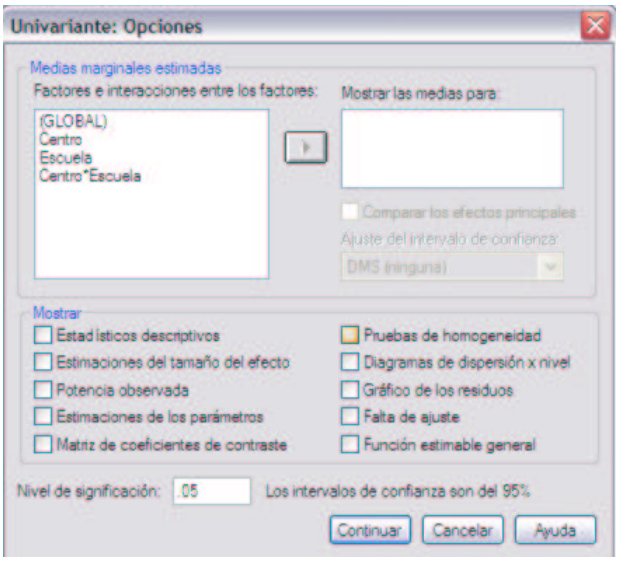

Figura 3.3: Dos factores: opciones

Ejecutando el campo *Continuar* se regresa a la caja de diáloo principal, en ella se selecciona el campo *Aceptar*, obteniendo los resultados del análisis. Se recomienda usar los residuos estimados por el modelo para verificar los supuestos teóricos en que se sustenta los diseños en bloques.

3.6. Solución de problemas

Problema 3.1 *Resolver usando SPSS el ejemplo 4.1*

A partir de los datos del ejemplo 4.1, construir un archivo de datos en SPSS que contenga tres variables con 12 datos cada una, las variables son: Parcelas con cuatro valores, insecticidas con tres valores y plántulas con doce valores, el archivo se denomina *Frijoles.Sav*.

Al ejecutar la secuencia de comandos

```
Analizar --> Modelo Lineal General --> Univariado
```

En la caja de diálogo asociada se seleccionan los campos:

```
Dependiente: pl\'antulas
Factores fijos: Insecticidas
                Parcelas
```

```
Modelo: Personalizado
       Construir términos:
                          Efectos principales:
                                 Parcelas
                                 Insecticidas
       Continuar
Opciones:
        Medias marginales:  Parcelas
                            Insecticidas
           Comparar efectos principales: Bonferroni
        Pruebas de Homogeneidad
        Nivel de significancia: 0.05
    Continuar
Aceptar
```

Obteniéndose el reporte siguiente:

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig
Modelo corregido	2311.417	5	462.283	118.030	.000
Intersección	67350.083	1	67350.083	17195.766	.000
Insecticida	1925.167	2	962.583	245.766	.000
Parcelas	386.250	3	128.750	32.872	.000
Error	23.500	6	3.917		
Total	69685.000	12			
Total corregido	2334.917	11			

Tabla 3.15: Pruebas de efectos inter-Sujetos

Si se observan las líneas encabezadas por *Insecticida, Parcelas, Error y Total corregido*, podemos ver que estas líneas contienen la información obtenida en la tabla ANOVA construida cuando se realizó el análisis manualmente.

Insecticidas: al leer la tabla 3.16 se observan los valores estimados para los promedios de semillas germinadas según el tipo de insecticida aplicado.

Las semillas tratadas con el insecticida número dos presentan, aparentemente mayor porcentaje de germinación; para establecer si realmente esta diferencia es estadísticamente significativa el 5 %, se debe leer la tabla 3.17.

Los $p-valores$ de las comparaciones por pares del porcentaje de semillas germinadas después de aplicar los tres insecticidas, son menores que 5 %, es decir los promedios de semillas germinadas son distintos para cada insecticida usado.

			Intervalo 95 %	
			Límite	Límite
Insecticida	Media	Error tip.	Inferior	Superior
1	57.500	.990	55.079	59.921
2	87.250	.990	84.829	89.671
3	80.000	.990	77.579	82.421

Tabla 3.16: Estimaciones

					Intervalo	
Insecticida	Insecticida	Diferencia			Límite	Límite
I	J	I-J	Error	Sig	Inferior	Superior
1	2	-29.750*	1.399	.000	-33.174	-26.326
	3	-22.500*	1.399	.000	-25.924	-19.076
2	1	29.750*	1.399	.000	26.326	33.174
	3	7.250*	1.399	.002	3.826	10.674
3	1	22.500*	1.399	.000	19.076	25.924
	2	-7.250*	1.399	.002	-10.674	-3.826

Tabla 3.17: Comparaciones por pares

Por otra parte, las diferencias de medias de las comparaciones por pares usando como referencia el insecticida 2, son todas positivas, indicador de mayor porcentaje de germinación para las semillas tratadas con este insecticida, el insecticida 1 presenta el más bajo porcentaje de semillas germinadas, lo cual corrobora la obsevación generada en la tabla de medias estimadas.

Parcelas: para conocer las diferencias existente en los promedios de semillas germinadas en las parcelas utilizadas, es necesario leer la tabla 3.18.

			Intervalo 95 %	
			Límite	Límite
Parcela	Media	Error tip.	Inferior	Superior
1	73.333	1.143	70.537	76.129
2	66.333	1.143	63.537	69.12
3	80.667	1.143	77.871	83.463
4	79.333	1.143	76.537	82.129

Tabla 3.18: Estimaciones

Las semillas plantadas en la parcela 3 presenta, aparentemente, mayor porcentaje de germinación.

					Intervalo	
Parcela I	Parcela J	Diferencia	Error	Sig	Límite Inferior	Límite Superior
1	2	7.000*	1.616	.005	3.046	10.954
	3	-7.333*	1.616	.004	-11.287	-3.379
	4	-6.000**	1.616	.010	-9.954	-2.046
2	1	-7.000	1.616	.005	-10.954	-3.046
	3	-14.333*	1.616	.000	-18.287	-10.379
	4	-13.000*	1.616	.000	-16.954	-9.046
3	1	7.333*	1.616	.004	3.379	11.287
	2	14.333*	1.616	.000	10.379	18.287
	4	1.333	1.616	.441	-2.621	5.287
4	1	13.000*	1.616	.010	2.046	9.954
	2	6.000*	1.616	.000	9.046	16.954
	3	-1.333	1.616	.441	-5.287	2.621

Tabla 3.19: Comparaciones por pares

En las parcelas 3 y 4 se obtienen porcentajes de germinación de semillas similares, mientras que en las otras parcelas los indices son diferentes al nivel de significancia del 5 %. El mayor porcentaje de semillas germinadas se alcanzó en la parcela 3, y el menor fue alcanzado en la parcela 2.

Problema 3.2 *En un estudio sobre crecimiento, desarrollo y adaptación de cuatro variedades de sorgo en la región llanera, se usó un diseño en bloques completamente al azar con seis genotipos, tres repeticiones y seis plantas por replicas. La respuesta de interés es la longitud de la segunda hoja en la séptima semana de crecimiento:*

- *Describa el modelo matemático asociado al diseño*
- *Realizar el ANOVA. Estime los promedios de cada variedad y la eficiencia del modelo*
- *Comente las conclusiones*

El diseño de interés es del tipo bloque al azar, el factor tratamiento Genotipo con seis niveles, el factor de bloqueo Parcelas con tres niveles. El modelo matemático asociado es:

	Bloques					
Genotipo	I		II		III	
SBAR1	5.0	5.8	7.4	5.2	2.5	6.4
	4.7	4.1	5.6	5.0	4.9	5.9
	4.7	4.9	5.0	5.3	3.4	3.9
ICBAR2	4.7	4.3	4.9	5.4	7.3	3.3
	4.0	3.6	4.4	5.6	5.4	3.7
	5.0	5.1	4.4	4.6	5.4	5.0
ICBAR3	3.5	5.0	7.4	7.3	6.4	6.5
	5.1	4.2	6.1	5.9	6.1	5.9
	4.5	5.0	5.9	5.4	5.4	5.5
ICBAR3	4.0	3.7	3.6	3.8	4.5	4.6
	3.0	3.5	4.0	3.8	2.9	3.6
	2.5	3.8	3.2	3.8	3.5	4.0
ICBAR5	3.7	4.2	3.2	4.5	4.4	5.2
	3.7	4.0	4.2	5.6	3.8	4.7
	4.1	4.4	5.5	5.6	4.8	5.0
ICBAR6	5.7	5.1	5.1	4.4	6.3	5.7
	6.1	4.5	6.1	5.6	4.6	5.6
	5.2	5.9	6.5	5.7	3.9	5.8

Tabla 3.20:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \;\; j = 1, 2, 3$$

donde:

μ**:** es la media global de la variable respuesta, longitud de la segunda hoja.

α_i**:** es el efecto medio de la variedad o genotipo sobre la longitud de la segunda hoja.

β_j**:** es el efecto medio sobre la respuesta asociado al nivel j de las parcelas.

ε_{ij}**:** es el residuo aleatorio del modelo lineal, distribuido $N(0, \sigma^2)$ independientes.

Para construir la tabla ANOVA asociada al modelo lineal, se debe ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal General --> Univariado
  Dependientes: Longitud
```

```
  Factores fijos: Genotipo, Parcelas
  Modelo:
     Construir términos:
            Efectos principales: Genotipo, Parcelas
       Continuar
  Opciones:
         Medias Marginales: genotipo
  Continuar
Aceptar
```

El la tabla 3.21 se reporta las pruebas de efectos inter-sujetos, la cual permite dilucidar acerca del contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \ \forall i \\ H_1 &: \text{al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Al leer la línea *Genotipos* se observa que el $p - valor$ del contraste es igual a 0.106, valor mayor que el nivel de significancia $\alpha = 5\,\%$, es decir, al nivel del $5\,\%$ no existen evidencias significativas para afirmar que el desarrollo, adaptación y crecimiento de las planta no es afectado por las variedades cultivadas.

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig.
Modelo Corregido	342.552	7	48.936	1.686	.121
Intersección	3072.000	1	3072.000	105.844	.000
Bloque	70.877	2	35.439	1.221	.299
Genotipos	271.674	5	54.335	1.872	.106
Error	2902.388	100	29.024		
Total	6316.940	108			
Total corregido	3244.940	107			

Tabla 3.21: Pruebas de efectos inter-sujetos

Los valores estimados de las longitudes medias de la segunda hojas por variedades, se reporta en la tabla 3.22, aun cuando se sabe que las posibles diferencias observadas son producto del azar y no de las variedades de sorgo cultivadas, la variedad ICBAR2 alcanza el mayor promedio, mientras que la variedad ICBAR3 es la de menor promedio.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la tabla ANOVA del diseño, la variable respuesta no es afectada por el tipo de variedad cultivada, es decir, las cuatro variedades consideradas en el estudio presenta en promedio el mismo crecimiento, adaptación y desarrollo, sin importar la parcela donde fue cultivado.

			IC 95 %	
			Límite	Límite
Genotipo	Media	Error	Inferior	Superior
SBAR1	4.983	1.270	2.464	7.503
ICBAR1	4.783	1.270	2.264	7.303
ICBAR2	8.667	1.270	6.147	11.186
ICBAR3	3.656	1.270	1.136	6.175
ICBAR4	4.478	1.270	1.958	6.997
ICBAR5	5.433	1.270	2.914	7.953

Tabla 3.22: Estimaciones

La eficiencia relativa del diseño en bloques respecto a diseños al azar está dado por:

$$ER = \frac{2 * 35{,}439 + 3 * 5 * 29{,}024}{(3 * 6 - 1) * 29{,}024} = 1{,}026$$

Como $ER > 1$ se concluye que el diseño en bloques considerado es más eficiente que el diseño completamente al azar .

Problema 3.3 *Se desea estudiar el efecto de cuatro tipos de ruedas en la velocidad de los automóviles. Para tal fin se realiza un experimento con cuatro automóviles de forma que cada rueda es probada en una de las cuatro posiciones del automóvil. Se registra la velocidad alcanzada en 500m y se reporta en la tabla siguiente:*

	Posición			
Automóvil	1	2	3	4
1	90C	89D	86A	88B
2	90B	98C	96D	88A
3	89A	97B	98C	98D
4	105D	100A	105B	106C

Tabla 3.23:

Con las letras se está representando los cuatro tipos de ruedas.

- *Describir el modelo matemático asociado al diseño*
- *Construir la tabla de ANOVA*
- *¿Influyen las variables? ¿Debe modificarse el modelo?. De sus conclusiones*

El diseño formulado es del tipo cuadrados latinos, se está en presencia de dos variables de bloqueo y un factor, además de una variable respuesta. La variable repuesta es la velocidad alcanzada por los automóviles en 500 metros; las variables de bloqueo son las marcar de ruedas y la posición en que se ubican, el factor tratamientos son los tipos de automóviles, por ser un diseño en cuadrados latinos, todos los factores presentan el mismo número de niveles, en este caso cuatro.

El modelo matemático que explica la estimación de la velocidad alcanzada después de rodar 500 metros el automóvil, en término de los efectos principales de los factores es:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4$$

La secuencia de comandos ejecutada para el análisis estadístico de la información generada en la aplicación del diseño es:

```
Analizar --> Modelo Lineal general --> Univariado
 Dependiente: velocidad
 Factores fijos: Posición, Marca, automóvil
  Modelo:
        Personalizado:
          Construir términos:
            efectos principales:
                              Posición, Marca, automóvil
        Continuar
 Aceptar
```

La secuencia de comandos anterior, genera la tabla de ANOVA, ver tabla 3.24. El $p - valor$ asociado a la línea identificada como *Posición* es igual a 0.131, es decir, mayor al nivel de significancia del 5 %, por tanto se rechaza la hipótesis nula del contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \gamma_k = 0 \;\; k = 1, 2, 3, 4 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

en conclusión los niveles de la variable posición no afecta la velocidad promedio alcanzada por los automóviles al recorrer 500 metros.

Al rechazar $H_0 : \gamma_k = 0 \;\; k = 1, 2, 3, 4$, es necesario modificar el modelo planteado, eliminando el efecto principal asociado al nivel k del factor *Posición*, así, el diseño se convierte en uno del tipo bloques al azar, explicado por el modelo matemático:

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig
Modelo corregido	665.063a	9	73.896	33.150	.000
Intersección	144970.563	1	144970.563	65033.523	.000
Tipo	123.687	3	41.229	18.495	.002
Automóvil	522.688	3	174.229	78.159	.000
Posición	18.687	3	6.229	2.794	.131
Error	13.375	6	2.229		
Total	145649.000	16			
Total corregido	678.438	15			

Tabla 3.24: Prueba de efectos inter-sujetos

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

Ahora, la secuencia de comandos ejecutada para el análisis estadístico de la información generada en la aplicación del diseño es:

```
Analizar --> Modelo Lineal general --> Univariado
 Dependiente: velocidad
 Factores fijos: Marca, automóvil
  Modelo:
        Personalizado:
          Construir términos:
            efectos principales:
                                Marca, automóvil
        Continuar
   Opciones:
           Mostrar medias para:
            Marca, automóvil
        Comparar los efectos principales
             Ajuste intervalos de confianza:
              Bonferroni
      Continuar
 Aceptar
```

La tabla 3.25 reporta la prueba de los efectos inter-sujetos para las variables *Marcas* y *Automóvil*.

El primer contraste que se puede analizar con la información reportada en la tabla es:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \;\; i = 1, 2, 3, 4 \\ H_1 &: \text{al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig
Modelo corregido	646.375a	6	107.729	30.240	.000
Intersección	144970.563	1	144970.563	40693.491	.000
Tipo	123.687	3	41.229	11.573	.000
Automóvil	522.688	3	174.229	48.906	.002
Error	32.063	9	3.563		
Total	145649.000	16			
Total corregido	678.438	15			

Tabla 3.25: Prueba de efectos inter-sujetos

El contraste anterior permite verificar la existencia o no de diferencias significativas en los efectos promedios asociados al autómovil utilizado en el ensayo, sobre la velocidad alcanzada por los autos en los primeros 500 metros.

Como el $p-valor$ asociad a la línea en cabezada con *Automóvil* es 0.002 inferior a $\alpha = 0{,}05$ se rechaza H_0, es decir, los tipos de automóviles influyen estadísticamente en la velocidad alcanzada por el automóvil después de recorrer 500 metros. La tabla 3.26 reporta las diferencias entre las velocidades medias de los posibles pares de autos, la velocidad promedio del auto denotado como 1 es estadísticamente diferente a las medias de los restantes automóviles; mientras que los autos denotados como tipos 2 y 3 presentan velocidades medias similares el nivel de significancia del 5 %, finalmente los autos tipo 4 presentan diferencias con sus homólogos.

La tabla 3.27 reporta la identificación de los dos grupos antes mencionados, el Auto denominado uno presenta la menor velocidad media, formando el primer grupo, dentro del grupo formado por los Autos 2 y 3 se , se observan velocidades promedios similares, mientras que el automóvil con mayor velocidad media es el automóvil denominado como tipo 4.

Finalmente, en el contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_j = 0 \;\; j = 1,2,3,4 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

permite establecer la existencia o no de diferencias estadísticamente significativas, asociadas a los diferentes tipos de ruedas consideradas en el ensayo, sobre la velocidad alcanzada después de recorrer 500 metros. Se rechaza la hipótesis nula ya que el $p-valor$ del contraste es menor al nivel de significancia fijado por el investigador, $\alpha = 5\,\%$, es decir, existen efectos significativos asociados a tipo de ruedas utilizadas.

					IC 95 %	
Auto I	Auto J	Medias	Error	Sig.	Límite inferior	Límite superior
1	2	-4.75*	1.335	.026	-8.92	-.58
	3	-7.25*	1.335	.002	-11.42	-3.08
	4	-15.75*	1.335	.000	-19.92	-11.58
2	1	4.75*	1.335	.026	.58	8.92
	3	-2.50	1.335	.303	-6.67	1.67
	4	-11.00*	1.335	.000	-15.17	-6.83
3	1	7.25*	1.335	.002	3.08	11.42
	2	2.50	1.335	.303	-1.67	6.67
	4	-8.50*	1.335	.001	-12.67	-4.33
4	1	15.75*	1.335	.000	11.58	19.92
	2	11.00*	1.335	.000	6.83	15.17
	3	8.50*	1.335	.001	4.33	12.67

Tabla 3.26: Comparaciones por pares

		Subgrupos		
Automóvil	*N*	1	2	3
1	4	88.25		
2	4		93.00	
3	4		95.50	
4	4			104.00
Significancia		1.000	.303	1.000

Tabla 3.27: subgrupos significativos

Para conocer las diferencias entre los pares de medias se debe realizar la lectura de la tabla 3.28. El tipo de ruedas 1 presenta diferencias significativas con los restantes tipos, al nivel de confianza del 5 %, como las diferencias de medias poseen todas medias son negativas, se puede concluir que el tipo de ruedas 1 logra la menor velocidad promedio. El tipo de ruedas 2 presenta promedio similar al 5 % con los alcanzados por las ruedas del tipo 2,3 y 4; de igual manera se observa que el promedio más alto lo alcanzan las ruedas del tipo 3, ya que las diferencias de medias en este tipo de ruedas son todas positivas.

Los grupos formados por tipos de ruedas con promedios similares son dos: el primer grupo con un sólo tipo de ruedas *tipo 1*, con una velocidad promedio de 90.75, el grupo dos lo conforman los tres tipos restantes de ruedas con velocidades medias iguales a 95 para el tipo 2, 97 en el tipo 4 y finalmente

					IC 95 %	
					Límite	Límite
Tipo I	Tipo J	Medias	Error	Sig.	inferior	superior
1	2	-4.25*	1.335	.046	-8.42	-.08
	3	-7.25*	1.335	.002	-11.42	-3.08
	4	-6.25*	1.335	.005	-10.42	-2.08
2	1	4.25*	1.335	.046	.08	8.42
	3	-3.00	1.335	.182	-7.17	1.17
	4	-2.00	1.335	.477	-6.17	2.17
3	1	7.25*	1.335	.002	3.08	11.42
	2	3.00	1.335	.182	-1.17	7.17
	4	1.00	1.335	.875	-3.17	5.17
4	1	6.25*	1.335	.005	2.08	10.42
	2	2.00	1.335	.477	-2.17	6.17
	3	-1.00	1.335	.875	-5.17	3.17

Tabla 3.28: Comparaciones por pares

el tipo 3 alcanza una velocidad media de 98 km/h en 500 metros recorridos, lo cual corrobora la información extraída de la tabla de comparaciones por pares.

La información anterior se resume en la tabla 3.29.

		Subgrupos	
Tipo	*N*	1	2
1	4	90.75	
2	4		95.00
4	4		97.00
3	4		98.00
Significancia		1.000	.114

Tabla 3.29: subgrupos significativos

Capítulo 4

Diseños Factoriales

4.1. Preliminares

El objetivo de un *diseño factorial* es estudiar el efecto de varios factores sobre una variable respuesta, es decir, se desea estudiar la realción entre los factores y la respuesta con la finalidad de conocer mejor como es esta relación y generar conocimiento que permita tomar decisiones que mejoren el desempeño del proceso sometido al análisis. Los factores pueden ser de tipo *cualitativo:* maquinas, tipo de material, operadores, presencia o ausencia de un evento, etc, o de tipo *cuantitativo:* temperatura, humedad, velocidad, preción, etc. Para conocer la manera en que influye cada factor sobre la variable respuesta, es necesario elegir al menos dos niveles de prueba para cada uno de ellos. Con el diseño factorial completo se corren aleatoriamente en el proceso todas las posibles combinaciones que pueden formarse con los niveles seleccionados.

Así, un *diseño factorial* es el conjunto de unidades experimentales o tratamientos que pueden formarse considerando todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores. En otras palabras, un *diseño factorial* es un análisis multivariante en el que se consideran $q \geq 2$ variables independientes o predictoras; que descomponen a la población en k grupos exhaustivos mutuamente excluyente, sobre los cuales se mide una variable dependiente o respuesta, y se desea estudiar el efecto de cada una de las variables independientes y el efecto generado por la interacción de posibles subgrupos de variables independientes.

El número de interacciones entre p de los k factores independiente es igual a:

$$\left(\begin{array}{c} k \\ p \end{array} \right) = \frac{k!}{p!(k-p)!}$$

mediante esta identidad podemos describir $2^k - 1$ efectos:

$$\begin{aligned}
\binom{k}{1} &= k \text{ efectos principales} \\
\binom{k}{2} &= \frac{k(k-1)}{2} \text{ efectos de segundo orden} \\
\binom{k}{k-1} &= k \text{ efectos de orden } k-1 \\
\binom{k}{k} &= 1 \text{ efecto de orden } k
\end{aligned}$$

4.2. El modelo matemático

Supongamos se dispone de muestras de k subpoblaciones, establecidas por las k combinaciones de los valores de un conjunto de q variables independientes o factores y que sobre cada individuo de cada muestra, se mide una variable en escala de intervalo o razón, tal que su distribución en cada una de las subpoblaciones es normal y con la misma varianza en todas ellas.

El análisis de la varianza de q factores se utiliza para contrastar la hipótesis nula de que las muestras proceden de k subpoblaciones en las que la media de la variable, es la misma, es decir el cuerpo de hipótesis se formula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
H_0 &: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{pq} \\
H_1 &: \text{ al menos dos medias son distintas}
\end{aligned}$$

Si la variable Y en los k grupos establecidos por los valores de los factores $X_1, \cdots, X_q$, fuese muy distintos entre sí, y, además, la varianza entre cada grupo fuera pequeña (los grupos muy distintos entre sí y, dentro de cada grupo, un comportamiento muy homogéneo), la variabilidad sería debida a la diferencia entre grupos. Sin embargo, si las medias en los k grupos fuese muy parecida entre sí, dado que se supone la varianza dentro de cada grupo la misma, la variabilidad total sería debida a las diferencias entre grupos.

El análisis factorial de la varianza con q factores se basa en que la variabilidad total de la muestra puede descomponerse en la variabilidad debida, o explicada por las diferencias entre grupos y la debida a las diferencias en los grupos, o residual, es decir:

$$SS_T = SS_e + SS_r$$

Por otra parte, la variabilidad explicada por el efecto de pertenecer a un grupo puede descomponerse en la variabilidad debida a los efectos de cada una de los q factores (efectos principales) y la debida al efecto de todas las posibles interacciones entre ellas, es decir:

$$SS_T = SS_p + SS_{i2} + \cdots + SS_{iq} + SS_r$$

donde:

SS_T: mide la desviación de cada puntuación respecto a la media total sin distinguir grupos

SS_p: mide el efecto total de las variables independientes:

$$SS_p = \sum_{j=1}^{p} SC_j$$

donde SC_j mide el efecto de la variable independiente X_j, es decir mide la suma de los efectos de primer orden

SS_{i2}: mide el nivel de efecto de las interacciones entre cada posible par de variables independientes, es decir mide la suma de los efectos de segundo orden, se expresa como

$$SC_{i2} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=j+1}^{q} SC_{ij}$$

donde SC_{ij} mide el efecto de la interración de las variables X_i y X_j.

SS_{iq}: mide el efecto de las q variables independientes de manera simultanea, es decir el efecto de orden q

SS_r: es la parte de la variabilidad total no explicada por los efectos de orden uno hasta orden q, conocida como variabilidad residual.

La tabla de análisis factorial de la varianza se construye a partir de esta descomposición y proporciona el estadístico para contrastar la hipótesis nula de igualdad de las medias en los k grupos o subpoblaciones definidas por las combinaciones de factores. Dicho estadístico compara la variabilidad debida a las diferencias entre grupos con la debida a las diferencias dentro de los grupos. En consecuencia, cuanto mayor sea el valor del estadístico,

Efecto	Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de. libertad	Media cuadrática	test F	Sig.
1^{er}						
orden	X_1	SS_1	GL_1	MC_1	F_1	p
	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\ddots$	$\cdots$	$\vdots$
	X_q	SS_q	GL_q	MC_q	F_q	p
2^{do}						
orden	X_1X_2	SS_{12}	GL_{12}	MC_{12}	F_{12}	p
	X_1X_3	SS_{13}	GL_{13}	MC_{123}	F_{13}	p
	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\ddots$	$\cdots$	$\vdots$
orden						
q	$X_1 \cdots X_q$	SS_{iq}	GL_{iq}	MC_{iq}	F_{iq}	p
Explicada		SS_E	GL_E	MC_E	F_E	p
Residual		SS_r	GL_r	MC_r	F_r	p
Total		SS_T	GL_T			

Tabla 4.1: Tabla ANOVA factorial general

más diferenciados estarán los grupos. Si el $p - valor$ asociado al estadístico es menor que α, se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación α. La tabla del análisis factorial de la varianza se resume de la tabla 4.1

donde:

$$\begin{aligned} SS_j &: \text{Suma de cuadrados del efecto } j \\ Gl_j &: \text{Grados de libertad del efecto } j \\ MC_j = \frac{SS_j}{Gl_j} &: \text{Media cuadrática del efecto } j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_j = \frac{MC_j}{MC_r} &: \text{Estadístico de prueba del efecto } j \\ p_j = Pr(F > F_j) &: \text{p-valor del efecto } j \end{aligned}$$

k es el número de categorías que se obtienen de la combinación de los valores de los distintos factores; por ejemplo, si se trata de dos factores, uno con tres categorías y otro con dos categorías, quedarían establecidos seis categorías de sus combinaciones.

Dada la complejidad del diseño factorial de k factores como se ilustra en la tabla 4.1, a continuación se estudian a detalle los diseños con dos y tres factores.

4.3. Diseños con dos factores

El análisis factorial de la varianza con dos factores es un diseño de ANOVA que permite estudiar simultáneamente los efectos de dos fuentes de variación. En cualquier caso el investigador puede estar interesado en estudiar si hay, o no diferencias en la evolución de un fenómeno según el comportamiento de dos factores o variables categóricas. En un diseño con dos factores se clasifican a los individuos de acuerdo a dos factores o vías para estudiar simultáneamente sus efectos.

Cada observación individual se representa como

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, \cdots, a,\ j = 1, 2, \cdots, b,\ k = 1, 2, \cdots, N$$

el primer subíndice indica el nivel del primer factor, el segundo el nivel del segundo factor y el tercero la observación dentro de la muestra.

Las observaciones de un diseño con dos factores pueden ser ubicadas en una tabla de doble entradas de la forma:

	Factor A				
Factor B	Nivel 1	$\cdots$	Nivel i	$\cdots$	Nivel a
Nivel 1	$y_{111} \cdots y_{11N}$	$\cdots$	$y_{i11} \cdots y_{i1N}$	$\cdots$	$y_{a11} \cdots y_{a1N}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\ddots$	$\cdots$	$\vdots$
Nivel j	$y_{1j1} \cdots y_{1jN}$	$\cdots$	$y_{ij1} \cdots y_{ijN}$	$\cdots$	$y_{aj1} \cdots y_{ajN}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\ddots$	$\cdots$	$\vdots$
Nivel b	$y_{1b1} \cdots y_{1bN}$	$\cdots$	$y_{ib1} \cdots y_{ibN}$	$\cdots$	$y_{ab1} \cdots y_{abN}$

Tabla 4.2: ANOVA de dos factores: datos

La descomposición de la suma de cuadrados total en el caso en que el tamaño de la interacción de cada par de niveles es constante, es decir, cuando $n_{ij} = s$, puede hacerse de la forma:

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E \tag{4.1}$$

La ecuación 4.1 se conoce como *Identidad de la suma de cuadrados de un ANOVA de dos factores*; cada factor de la ecuación 4.1 representa:

SS_T**:** representa la variación total de la muestra sin considerar grupos, está definida por:

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (y_{ijk} - \overline{Y}_{...})^2$$

SS_A: representa la variabilidad de la variable dependiente explicada por el factor A, es decir, la suma de cuadrados asociada al factor A, está definida por

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\overline{y}_{i..} - \overline{Y}_{...})^2$$

SS_B: corresponde a la variabilidad de la variable X asociada con los niveles del factor B, es decir, la media cuadrática de este factor, se define como:

$$SS_B = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\overline{y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2$$

SS_{AB}: corresponde a la variabilidad de la variable dependiente producto de la interacción de los niveles de cada uno de los dos factores, es conocida como la suma cuadrada de la interacción entre los factores, se define como:

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\overline{y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...})^2$$

SS_E: corresponde a la variabilidad de la variable dependiente que no es explicada por cada factor de manera individual y de manera conjunta por la interacción de los niveles de ambos factores, por esta razón es conocida como la suma cuadrada de los errores, se define como:

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\overline{y}_{ijk} - \overline{y}_{ij.})^2$$

Las identidades utilizadas en la definición de las componentes de la suma de cuadrados del modelos de ANOVA de dos factores son:

$$S_{i..} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{i..} = \frac{S_{i..}}{nb}$$

$$S_{.j.} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{.j.} = \frac{S_{.j.}}{na}$$

$$S_{..k} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{..k} = \frac{S_{..k}}{ab}$$

$$S_{ij.} = \sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{ij.} = \frac{S_{ij.}}{n}$$

$$S_{...} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} \qquad \overline{y}_{...} = \frac{S_{...}}{nab}$$

Los resultados de un ANOVA de dos factores se suelen representar en una tabla como la siguiente:

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de. libertad	Media cuadrática	test F	Sig.
Factor A	SS_A	$a-1$	$MC_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$\frac{MC_A}{MC_W}$	p
Factor B	SS_B	$b-1$	$MC_B = \frac{SS_B}{b-1}$	$\frac{MC_B}{MC_W}$	p
Interacción	SS_{AB}	s	$MC_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{MC_{AB}}{MC_W}$	p
Intragrupos	SS_W	r	$MC_W = \frac{SS_W}{N-ab}$		
Total	SS_T	$N-1$			

Tabla 4.3: Tabla de análisis de la varianza: dos factores

Cuando $s = (a-1)(b-1)$,$r = N - ab$.

Dentro del análisis factorial de la varianza existen diferentes modelos de estudio los más comunes son:

Modelos con factores de efectos fijos: en el modelo de dos factores de efectos fijos A, B, a diferencia del modelo de un solo factor, las distintas subpoblaciones corresponden a las combinaciones de los valores de los dos factores, donde los niveles de cada factor representan todos los posibles efectos que se desean analizar. Este modelo es considerado por el investigador, cuando él está interesado solamente en los a niveles del factor A y los b niveles del factor B presentes en el experimento.

El modelo matemático de este análisis es:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \tag{4.2}$$

donde

x_{ijk}**:** es la puntuación del individuo k, perteneciente al grupo establecido por los niveles i y j de los factores A y B respectivamente, en la variable Y.

μ es la media global de la muestra total, media poblacional de la variable Y.

α_i**:** es el efecto debido al nivel i del factor A.

β_j**:** es el efecto debido al nivel j del factor B.

$(\alpha\beta)_{ij}$**:** es el efecto debido a la interaccción nivel i del factor A y el nivel j del factor B respectivamente.

ε_{ijk}**:** es el error del modelo lineal o desviaciones aleatorias al rededor de la media, se suponen independientes y $N(0, \sigma^2)$.

Bajo los supuestos teóricos:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = \sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

Del mismo modo, que se hizo en el ANOVA de un factor, para formular los contrastes de hipótesis, es necesario conocer el valor esperado para las distintas medias cuadráticas resumidas en la tabla 4.4

Media Cuadrática	Valor estimado
Factor A	$\sigma^2 + \frac{nb}{a-1} \sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2$
Factor B	$\sigma^2 + \frac{na}{b-1} \sum_{i=1}^{a} \beta_i^2$
Interacción	$\sigma^2 + \frac{N}{(a-1)(b-1)} \sum_{i=1}^{a} (\alpha_i \beta_j)^2$
Error	σ^2

Tabla 4.4: ANOVA: Valores esperados

Así, los estadísticos:

$$\begin{aligned} F_A &= \frac{MS_A}{MS_E} \sim F_{(a-1),(n-1)ab} \\ F_B &= \frac{MS_B}{MS_E} \sim F_{(b-1),(n-1)ab} \\ F_{AB} &= \frac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F_{(a-1)(b-1),(Nn-1)ab} \end{aligned}$$

permiten contrastar respectivamente, las hipótesis:

- No existencia de interacciones entre los factores, si los efectos medios de interacciones $(\alpha\beta)_{ij}$ son iguales, el contraste se formulará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_0 &: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, a; \quad j = 1, 2, \cdots, b \\ H_1 &: \text{algún } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \quad i = 1, 2, \cdots, a; \quad j = 1, 2, \cdots, b \end{aligned}$$

  Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste de igualdad de medias de la interacción AB será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_{AB} &\leq F_{\alpha,(a-1)(b-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_{AB} &> F_{\alpha,(a-1)(b-1),(n-1)ab} \end{aligned}$$

  Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

- No existe efectos del primer factor, es decir, si los efectos medios del factor A (α_i) son iguales, el contraste se formulará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, a \\ H_1 &: \text{algún } \alpha_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \cdots, a; \end{aligned}$$

  Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste de igualdad los efectos del factor A será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &\leq F_{\alpha,(a-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &> F_{\alpha,(a-1),(n-1)ab} \end{aligned}$$

  Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

- No existe efectos del segundo factor, es decir, si los efectos medios del factor B (β_j) son iguales, el contraste se formulará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_j = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, b \\ H_1 &: \text{algún } \beta_j \neq 0 \quad j = 1, 2, \cdots, b \end{aligned}$$

  Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste de igualdad de efectos medios del factor B será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B &\leq F_{\alpha,(b-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B &> F_{\alpha,(b-1),(-1)ab} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

Modelo con factores de efectos aleatorios: supongamos ahora que se tienen dos factores de modo que en cada uno de los dos conjuntos de niveles de los factores se pueden considerar una muestra de una población suficientemente grande, sobre la cual se van a realizar estudios. Este modelo se formula cuando el investigador posee información a cerca de:

1. Una población definida en el total de los niveles del factor A, de la cual se extrajo una muestra aleatoria.
2. Sobre la población definida por los niveles del factor B se seleccionó una muestra aleatoria.

El modelo matemático de este tipo de análisis se expresa como:

$$y_{ijk} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \tag{4.3}$$

bajo los supuestos teóricos:

y_{ijk}**:** es el $k-$ésimo valor de la variable dependiente Y asociada al nivel i del factor A y el nivel j del factor B.

μ**:** es la media de la variable Y medida sobre la población total.

$A_i \sim N(0, \sigma_a^2)$**:** es el efecto aleatorio (Variable aleatoria). generado por el nivel i del factor A, se supone distribuido $N(0, \sigma_a^2)$ e independientes entre sí.

$B_j \sim N(0, \sigma_b^2)$**:** es el efecto aleatorio del nivel j del factor B, los B_j se suponen variables aleatorias independientes entre sí.

$(AB)_{ij} \sim N(0, \sigma_{ab}^2)$**:** es el efecto debido a la interacción del nivel i del factor A con el nivel j del factor B. Los AB_{ij} se suponen variables aleatorias independientes entre sí.

$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$**:** definen los residuos del modelo lineal, se suponen variables aleatorias independientes entre sí.

$\sigma_a^2, \sigma_b^2, \sigma_{ab}^2$ se conocen como las componentes añadidas de la varianza σ^2 por el factor A, el factor B y por la interacción de ambos.

De manera análoga, para formular los contrastes de hipótesis, es necesario conocer el valor esperado para las distintas medias cuadráticas:

En un modelo factorial con factores aleatorios no sé está interesado en estimar los efectos de los factores, sino, solo la existencia del componente añadido; en tal caso, sí, tiene sentido contrastar la existencia del

Media Cuadrática	Valor estimado
Factor A	$\sigma^2 + N\sigma^2_{ab} + bN\sigma^2_a$
Factor B	$\sigma^2 + N\sigma^2_{ab} + aN\sigma^2_b$
Interacción	$\sigma^2 + N\sigma^2_{ab}$
Error	σ^2

Tabla 4.5: ANOVA Valores esperados

componente añadido por cada factor, individualmente, incluso aunque, exista la componente producto de la interacción de los factores.

De manera análoga, para contrastar la existencia de componentes añadidos de la varianza, se construye un estadístico de prueba, comparando dos medias cuadráticas, tal estadístico se distribuye F_{MK} y a partir de allí, se elabora la regla de decisión de la forma habitual.

El contraste de hipótesis asociado a la existencia de un componente de la varianza añadida por la interacción de los factores A y B se define como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2_{ab} = 0 \\ H_1 &: \sigma^2_{ab} \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba

$$F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F_{(a-1)(b-1),(n-1)ab}$$

bajo H_0. Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste asociado a la existencia de una componente añadida por la interacción de los factores A y B, será:

$$\begin{aligned} &\text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_{AB} \leq F_{\alpha,(b-1),(n-1)ab} \\ &\text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B > F_{\alpha,(b-1),(n-1)ab} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

El contraste de hipótesisis asociado a la existencia de un componente de la varianza añadido por el factor aleatorio A vendrá formulado por:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2_a = 0 \\ H_1 &: \sigma^2_a \neq 0 \end{aligned}$$

el estadístico de prueba será:

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{AB}} \sim F_{(a-1),(n-1)ab}$$

bajo la hipóstesis nula. Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste asociado a la existencia de una componente asociada al efecto del factor A, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &\leq F_{\alpha,(a-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &> F_{\alpha,(a-1),(n-1)ab} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

El contraste de hipótesisis asociado a la existencia de un componente de la varianza añadido por el factor aleatorio B vendrá formulado por:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_b^2 = 0 \\ H_1 &: \sigma_b^2 \neq 0 \end{aligned}$$

el estadístico de prueba será:

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_{AB}} \sim F_{(b-1),(n-1)ab}$$

bajo la hipóstesis nula. Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste asociado a la existencia de una componente añadida al efecto del factor B, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B &\leq F_{\alpha,(b-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B &> F_{\alpha,(b-1),(n-1)ab} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

Modelos con factores de efectos mixtos: este tipo de modelos es apropiado para el estudio de diseños donde intervienen dos factores, uno con niveles predeterminados o fijos y los niveles del otro factor son seleccionados aleatoriamente.

El modelo matemático de este tipo de diseños se expresa de la forma siguiente:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_j + (\alpha B)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \tag{4.4}$$

donde:

μ**:** es la media de la variable y medida sobre la población total.

α_i**:** es el efecto del nivel i del factor fijo A sobre la observación y_{ijk} de la variable Y, sujetas a la condición $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$.

$B_i \sim N(0, \sigma_b^2)$**:** es el efecto del nivel j del factor aleatorio B sobre la observación y_{ijk} de la variable Y.

$(\alpha B)_{ij} \sim N(0, \sigma_{ab}^2)$**:** son variables aleatorias idénticamente distribuidas.

$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$**:** es el error del modelo lineal o desviaciones aleatorias al rededor de la media, se suponen independientes.

Las variables aleatorias $B_j, (\alpha B)_{ij}, \varepsilon_{ijk}$ son independientes dos a dos.

De manera análoga, para formular los contrastes de hipótesis, es necesario conocer el valor esperado para las distintas medias cuadráticas:

Media Cuadrática	Valor estimado
Factor A	$\sigma^2 + N\sigma_{ab}^2 + \frac{Nb}{a-1}\sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2$
Factor B	$\sigma^2 + aN\sigma_b^2$
Interacción	$\sigma^2 + N\sigma_{ab}^2$
Error	σ^2

Tabla 4.6: ANOVA: valores estimados

El contraste acerca de los efectos medios asociados al factor fijo A, vendrá formulado por:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \cdots, a \\ H_1 &: \text{alguno no nulo} \end{aligned}$$

el estadístico de prueba será:

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{AB}} \sim F_{(a-1),(a-1)(b-1)}$$

bajo la hipóstesis nula.

A diferencia del modelo de efectos fijos, donde en el denominador se utiliza MS_E en lugar de MS_{AB}, la razón del cambio en el modelo mixto, es que MS_A y MS_{AB} son las medias cuadráticas que posee el mismo valor esperado bajo H_0.

Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste al efecto del factor A, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &\leq F_{\alpha,(a-1),(a-1)(b-1)} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &> F_{\alpha,(a-1),(a-1)(b-1)} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

El contraste acerca de la existencia de un componente de la varianza relativo a la variable aleatoria B, está formulado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_b^2 = 0 \\ H_1 &: \sigma_b^2 \neq 0 \end{aligned}$$

el estadístico de prueba será:

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_E} \sim F_{(b-1),(n-1)ab}$$

bajo la hipóstesis nula.

En este caso, a diferencia del modelos de efectos fijos, en el denominador se utiliza MS_E en lugar de MS_{AB}, ya que MS_E y MS_B son las medias cuadráticas que posee el mismo valor esperado bajo H_0.

Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste asociado a la existencia de una componente relativa al efecto del factor B, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B &\leq F_{\alpha,(b-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B &> F_{\alpha,(b-1),(n-1)ab} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

Si los efectos medios de interacciones $(\alpha B)_{ij}$ son iguales, el contraste se formulará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_{ab}^2 = 0 \\ H_1 &: \sigma_{ab}^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste de igualdad de medias de la interacción AB será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_{AB} &\leq F_{\alpha,(a-1)(b-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_{AB} &\geq F_{\alpha,(a-1)(b-1),(n-1)ab} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

En el modelo con efectos mixtos los estimadores están definidos por:

$$\widehat{\mu} = \overline{Y}_{...} \qquad \widehat{\alpha}_i = \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}$$
$$\widehat{\sigma}^2 = MS_E \qquad \widehat{\sigma}_b^2 = \frac{MS_B - MS_E}{ab}$$
$$\widehat{\sigma}_{ab}^2 = \frac{MS_{AB} - MS_E}{b}$$

En la práctica, cuando la cantidad de datos lo permite, las identidades utilizadas para resolver diseños bifactoriales son:

$$\begin{aligned}
SC_A &= \frac{1}{bn}\sum_i \Big(\sum_j \sum_k Y_{ijk}\Big)^2 - C \\
SC_B &= \frac{1}{an}\sum_j \Big(\sum_i \sum_k Y_{ijk}\Big)^2 - C \\
SC_{A*B} &= \frac{1}{n}\sum_i \sum_j \Big(\sum_k y_{ijk}\Big)^2 - C - \Big(SC_A + SC_B\Big) \\
SC_{Error} &= SC_{Total} - \Big(SC_A + SC_B + SC_{A*B}\Big) \\
SC_{Total} &= \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - C
\end{aligned}$$

donde:

$$C = \frac{1}{abn}\Big(\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}\Big)^2$$

Como ilustración de su aplicabilidad se resolverá el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 *Una empresa comercial ha clasificado a sus vendedores en tres grupos según la edad y en dos grupos según el sexo. Se desea establecer si existe algún efecto conjunto de la edad y el sexo en el nivel de ventas de la empresa; para tal fin se seleccionaron cuatro hombres y cuatro mujeres en cada grupo de edades y se registró el nivel de ventas de cada uno en el mes anterior a la selección. La información se resume en la tabla 4.7.*

La aplicación de las identidades anteriores, permite construir la tabla de ANOVA asociada al diseño bifactorial de interés.

$$C = \frac{1}{abn}\Big(\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}\Big)^2 = \frac{1}{24}(54{,}97)^2 = 125{,}90$$

Sexo	Edades			Suma
	Menos de 30 años	De 30 a 45 años	Más de 45 años	
Hombre	1.45	1.35	1.90	21.21
	1.28	1.23	2.00	
	1.80	2.60	1.90	
	1.45	1.80	2.45	
Mujer	3.40	3.80	2.60	33.76
	3.60	2.10	2.98	
	2.25	2.15	2.98	
	2.15	3.00	2.75	
suma	17.38	20.61	19.56	

Tabla 4.7: Datos

Ahora, cuando se calcula la suma de cuadrados para la edad se tiene:

$$\begin{aligned} SC_A &= \frac{1}{2*4}\left[(17{,}38)^2 + (18{,}03)^2 + (19{,}56)^2\right] - 125{,}90 \\ &= 126{,}22 - 125{,}90 = 0{,}32 \end{aligned}$$

La suma de cuadrados para el sexo es

$$\begin{aligned} SC_B &= \frac{1}{32*4}\left[(21{,}21)^2 + (33{,}76)^2\right] - 125{,}90 \\ &= 132{,}47 - 125{,}90 = 6{,}57 \end{aligned}$$

La suma de cuadrados de la interacción es:

$$\begin{aligned} SC_{AB} &= \frac{1}{4}\left[(5{,}98)^2 + (6{,}98)^2 + (8{,}25)^2 + (11{,}40)^2 + (11{,}05)^2 + (11{,}31)^2\right] \\ &\quad -125{,}90 - 0{,}32 - 6{,}57 \\ &= 133{,}13 - 125{,}90 - 6{,}89 = 0{,}34 \end{aligned}$$

La suma de cuadrados total es:

$$SC_{Total} = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - C = 138{,}40 - 125{,}90 = 12{,}50$$

finalmente

$$SC_{eror} = 12{,}50 - (6{,}57 + 0{,}32 + 0{,}34) = 5{,}27$$

De donde la tabla de ANOVA se resume como:

Para establecer si el efecto de la interacción o si los efectos principales son estadísticamente significativos, al nivel $\alpha = 5\,\%$ se compara el valor del estadístico observado en cada renglón con el valor crítico:

Fuente	Suma	G.L.	Media	F
Edad	0.32	2	0.16	0.546
Sexo	6.57	1	6.57	22.423
Sexo*Edad	0.34	2	0.27	0.921
Error	5.27	18	0.293	
Total	12.50	23		

Tabla 4.8: Tabla ANOVA

	F_{Crit}	F_{Obser}	Conclusión
Interacción	$F_{2,18,0,05} = 3{,}55$	0.921	Aceptar H_0
Edad	$F_{2,18,0,05} = 3{,}55$	0.546	Aceptar H_0
Sexo	$F_{1,18,0,05} = 4{,}41$	22.423	No aceptar H_0

Tabla 4.9: Conclusiones

En conclusión; la interacción de la edad con el sexo, ni los niveles de la edad influyen significativamente en el nivel de ventas al 5 %, mientras que el sexo si es significativo.

4.4. Diseños con tres factores

Cuando realizamos un ANOVA factorial con tres factores involucrados, un factor A con a niveles, el factor B con b niveles y finalmente un factor C con c niveles y un total de N observaciones de una variable medida en escala de razón o intervalo, el modelo matemático apropiado que explica este tipo de diseños se formula de la siguiente manera:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \varepsilon_{ijkl}$$

Donde:

y_{ijkl}**:** es la observación l-ésima de la variable Y en el nivel i del factor A asociada al nivel j del factor B y el nivel k del factor C.

μ**:** representa la media poblacional de la variable Y sin distinguir grupos definidos por los niveles de los factores y sus interacciones.

α_i**:** corresponde al efecto del nivel i del factor A sobre la variable Y.

β_j**:** es el verdadero efecto del nivel j del factor B sobre la variable Y.

γ_k**:** representa el efecto asociado al nivel k del factor C sobre la variable Y.

$\alpha\beta_{ij}$**:** mide el efecto de la interacción del nivel i del factor A y el nivel j del factor B sobre la variable Y.

$\alpha\gamma_{ik}$**:** mide el efecto de la interacción del nivel i del factor A y el nivel k del factor C sobre la variable Y.

$\beta\gamma_{jk}$**:** mide el efecto de la interacción del nivel j del factor B y el nivel k del factor C sobre la variable Y.

$\alpha\beta\gamma_{ijk}$**:** mide el efecto de la interacción del nivel i del factor A, el nivel j del factor B y el nivel k del factor C, simultáneos, sobre la variable Y.

ε_{ijkl}**:** mide el error o residuo aleatorio asociado al modelo lineal del ANOVA con tres factores, se distribuye $N(0, \sigma^2)$, independientes.

En este modelo las sumas de cuadrados se definen como:

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_C + SS_{AB} + SS_{AC} + SS_{BC} + SS_{ABC} + SS_E$$

Donde:

$$\begin{aligned}
SS_T &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{N}(Y_{ijkl} - \overline{Y}_{....})^2 \\
SS_A &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{N}(\overline{X}_{i...} - \overline{Y}_{....})^2 \\
SS_B &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{N}(\overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{....})^2 \\
SS_C &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{N}(\overline{X}_{..k.} - \overline{Y}_{....})^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
SS_{AB} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{N}(\overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{....})^2 \\
SS_{AC} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{N}(\overline{X}_{i.k.} - \overline{X}_{i...} - \overline{X}_{..k.} + \overline{X}_{....})^2 \\
SS_{BC} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{N}(\overline{X}_{.jk.} - \overline{X}_{.j..} - \overline{X}_{..k.} + \overline{X}_{....})^2 \\
SS_{ABC} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{N}(\overline{X}_{ijk.} - \overline{X}_{ij..} - \overline{X}_{i.k.} - \overline{X}_{.jk.} - \overline{X}_{....})^2 \\
SS_{E} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{N}(\overline{X}_{ijkl} - \overline{X}_{ijk.})^2
\end{aligned}
$$

cuando

$$
\overline{Y}_{....} = \frac{1}{abc}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n} Y_{ijk}; \qquad \overline{Y}_{i...} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} Y_{ijk}
$$

$$
\overline{Y}_{.j..} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} Y_{ijk}; \qquad \overline{Y}_{..k.} = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{c} Y_{ijk}
$$

La información anterior se resume en la tabla 4.10

Donde: $r = (a-1)(b-1)$, $s = (a-1)(c-1)$, $t = (b-1)(c-1)$, y $u = (a-1)(b-1)(c-1)$.

Como en el caso de dos factores, los supuestos a cerca del efecto real de los factores, puede formularse de diferentes maneras. En efecto, para un diseño con tres factores existe siete efectos diferentes. De todos ellos se considerarán sólo cuatro:

4.4.1. Modelos ANOVA con tres factores fijos

Este tipo de modelos se estudia cuando el investigador considera solamente los a niveles de un factor A, los b niveles de un factor B y los c niveles de un tercer factor C, presentes en un experimento, además de las posibles interacciones de los niveles de los factores.

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media cuadrática	test F
Factor				
A	SS_A	$a-1$	$MS_A = \frac{SS_A}{GL_A}$	$\frac{MS_A}{MS_E}$
B	SS_B	$b-1$	$MS_B = \frac{SS_B}{GL_B}$	$\frac{MS_B}{MS_E}$
C	SS_C	$c-1$	$MS_C = \frac{SS_C}{GL_C}$	$\frac{MS_C}{MS_E}$
Interacción				
AB	SS_{AB}	r	$MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{GL_{AB}}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_E}$
AC	SS_{AC}	s	$MS_{AC} = \frac{SS_{AC}}{GL_{AC}}$	$\frac{MS_{CA}}{MS_E}$
BC	SS_{BC}	t	$MS_{BC} = \frac{SS_{BC}}{GL_{BC}}$	$\frac{MS_{BC}}{MS_E}$
ABC	SS_{ABC}	u	$MS_{ABC} = \frac{SS_{ABC}}{GL_{ABC}}$	$\frac{MS_{ABC}}{MS_E}$
Error	SS_E	$abc(n-1)$	$MS_E = \frac{SS_E}{GL_E}$	
Total	SS_T	$N-1$		

Tabla 4.10: Tabla ANOVA con tres factores

Los supuestos teóricos sobre los cuales se fundamenta este tipo de modelos son:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=1}^{b} \beta_j = \sum_{k=1}^{c} \gamma_k = \sum_{i=1}^{a} \alpha\beta_{ij} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{b} \alpha\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{c} \alpha\gamma_{ik} = \sum_{i=1}^{a} \alpha\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{b} \beta\gamma_{jk} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{c} \beta\gamma_{jk} = \sum_{i=1}^{a} \alpha\beta\gamma ijk = \sum_{j=1}^{b} \alpha\beta\gamma ijk = \sum_{k=1}^{c} \alpha\beta\gamma ijk = 0$$

Los valores esperados para las medias cuadráticas de este modelo se resumen en la tabla 4.11

Lo primero que interesa conocer en un modelo ANOVA con tres factores fijos es, si se puede aceptar que los efectos medios de la interacción simultanea de los tres factores son iguales, para dar respuesta se formulará el contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha\beta\gamma_{ijk} = 0 \quad \forall ijk \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Suma cuadrática	Valor esperado
Factor A	$\sigma^2 + \frac{nbc}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2$
Factor B	$\sigma^2 + \frac{nac}{b-a}\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2$
Factor C	$\sigma^2 + \frac{nab}{c-1}\sum_{k=1}^{c}\gamma_k^2$
Interacciones	
AB	$\sigma^2 + \frac{nc}{(a-1)(b-a)}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\alpha\beta_{ij}^2$
AC	$\sigma^2 + \frac{nb}{(a-1)(c-1)}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}\alpha\gamma_{ik}^2$
BC	$\sigma^2 + \frac{na}{(b-1)(c-1)}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\beta\gamma_{jk}^2$
ABC	$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)(c-1)}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\alpha\beta\gamma_{ijk}^2$
Error	σ^2

Tabla 4.11: Valores esperados

Si H_0 es cierta entonces

$$F_{ABC} = \frac{MS_{ABC}}{MS_E} \sim F_{(a-1)(b-1)(c-1),abc(n-1)}$$

Dado α fijo, entonces al nivel de significancia α la regla de decisión del contraste de igualdad del efecto medio de las interacciones simultaneas de los tres factores será:

- Aceptar H_0 cuando $F_{ABC} \leq F_{\alpha,(a-1)(b-1)(c-1),abc(n-1)}$
- No aceptar H_0 si $F_{ABC} > F_{\alpha,(a-1)(b-1)(c-1),abc(n-1)}$

Equivalente a

- Aceptar H_0 cuando $p - valor \geq \alpha$
- No aceptar H_0 si $p - valor < \alpha$

Al aceptar H_0 cuando se estudia el efecto medio de la interacción de tercer orden, es necesario estudiar los efectos medios de orden dos. Para tal fin se formularán los contrastes:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha\beta_{ij} = 0 \ \forall ij \\ H_1 &: \text{ al menos uno distinto de cero} \end{aligned}$$

Si H_0 es cierta, entonces el estadístico de prueba

$$F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_E} \sim F_{(a-1)(b-1),abc(n-1)}$$

Dado α fijo, entonces al nivel de significancia α la regla de decisión del contraste de igualdad del efecto medio de las interacciones orden dos entre los tres factores será:

- Aceptar H_0 cuando $F_{AB} \leq F_{\alpha,(a-1)(b-1),abc(n-1)}$
- No aceptar H_0 si $F_{AB} > F_{\alpha,(a-1)(b-1),abc(n-1)}$

Equivalente a

- Aceptar H_0 cuando $p - valor \geq \alpha$
- No aceptar H_0 si $p - valor < \alpha$

De manera análoga, el contraste que define la existencia del efecto medio producto de la interacción de los niveles de los factores A y C se formulara como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha\gamma_{ik} = 0 \quad \forall ik \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Si H_0 es cierta entonces

$$F_{AC} = \frac{MS_{AC}}{MS_E} \sim F_{(a-1)(c-1),abc(n-1)}$$

Dado α fijo, entonces al nivel de significancia α la regla de decisión del contraste de igualdad del efecto medio de las interacciones entre los factores A y B será:

- Aceptar H_0 cuando $F_{AC} \leq F_{\alpha,(a-1)(c-1),abc(n-1)}$
- No aceptar H_0 si $F_{AC} > F_{\alpha,(a-1)(c-1),abc(n-1)}$

Equivalente a

- Aceptar H_0 cuando $p - valor \geq \alpha$
- No aceptar H_0 si $p - valor < \alpha$

Finalmente, el contraste asociado a la existencia de un efecto medio generado por la interacción de los niveles de los factores B y C se formulará como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta\gamma_{ijk} = 0 \quad \forall jk \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Si H_0 es cierta entonces

$$F_{BC} = \frac{MS_{BC}}{MS_E} \sim F_{(b-1)(c-1),abc(n-1)}$$

Dado α fijo, entonces al nivel de significancia α la regla de decisión del contraste de igualdad del efecto medio de las interacciones los factores B y C será:

- Aceptar H_0 cuando $F_{BC} \leq F_{\alpha,(b-1)(c-1),abc(n-1)}$
- No aceptar H_0 si $F_{BC} > F_{\alpha,(b-1)(c-1),abc(n-1)}$

Equivalente a

- Aceptar H_0 cuando $p - valor \geq \alpha$
- No aceptar H_0 si $p - valor < \alpha$

Si se ha establecido que los efectos medios de segundo orden producto de las combinaciones dos a dos de los niveles de los factores, son cero, es necesario estudiar los efectos principales asociado a cada factor. Para tal fin se formularán los contrastes:

Contrastes para el factor A: este contraste se expresa como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \quad \forall i \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Si H_0 es cierta entonces

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_E} \sim F_{(a-1),abc(n-1)}$$

Dado α fijo, entonces al nivel de significancia α la regla de decisión del contraste de igualdad del efecto medio principal será:

- Aceptar H_0 cuando $F_A \leq F_{\alpha,(a-1),abc(n-1)}$
- No aceptar H_0 si $F_A > F_{\alpha,(a-1),abc(n-1)}$

Equivalente a

- Aceptar H_0 cuando $p - valor \geq \alpha$
- No aceptar H_0 si $p - valor < \alpha$

Contrastes para el factor B: el contraste asociado a los efectos medios de los niveles del factor B, se formulará como

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_j = 0 \quad \forall j \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Si H_0 es cierta entonces

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_E} \sim F_{(b-1),abc(n-1)}$$

Dado α fijo, entonces al nivel de significancia α la regla de decisión del contraste de igualdad del efecto medio principal será:

- Aceptar H_0 cuando $F_B \leq F_{\alpha,(b-1),abc(n-1)}$
- No aceptar H_0 si $F_B > F_{\alpha,(b-1),abc(n-1)}$

Equivalente a

- Aceptar H_0 cuando $p - valor \geq \alpha$
- No aceptar H_0 si $p - valor < \alpha$

Contrastes para el factor C: finalmente el contraste asociado a los efectos medios generados por los niveles del factor C se formulará como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \gamma_k = 0 \quad \forall k \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Si H_0 es cierta entonces

$$F_C = \frac{MS_C}{MS_E} \sim F_{(c-1),abc(n-1)}$$

Dado α fijo, entonces al nivel de significancia α la regla de decisión del contraste de igualdad del efecto medio principal será:

- Aceptar H_0 cuando $F_C \leq F_{\alpha,(c-1),abc(n-1)}$
- No aceptar H_0 si $F_C > F_{\alpha,(c-1),abc(N-1)}$

Equivalente a

- Aceptar H_0 cuando $p - valor \geq \alpha$
- No aceptar H_0 si $p - valor < \alpha$

En la práctica, cuando la cantidad de datos lo permite, las identidades utilizadas para resolver diseños con tres factores de efectos fijos:

$$\begin{aligned}
SC_A &= \frac{1}{bcn}\sum_i Y_{i...}^2 - C \\
SC_B &= \frac{1}{acn}\sum_j Y_{.j..}^2 - C \\
SC_C &= \frac{1}{acn}\sum_k Y_{..k.}^2 - C \\
SC_{A*B} &= \frac{1}{cn}\sum_i\sum_j y_{ij..}^2 - C - \Big(SC_A + SC_B\Big) \\
SC_{A*C} &= \frac{1}{bn}\sum_i\sum_k y_{i.k.}^2 - C - \Big(SC_A + SC_C\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SC_{B*C} &= \frac{1}{an}\sum_j\sum_k y_{.jk.}^2 - C - \Big(SC_B + SC_C\Big) \\
SC_{A*B*C} &= \frac{1}{n}\sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk.}^2 - C \\
&\quad -\Big(SC_A + SC_B + SC_C + SC_{AB} + SC_{AC} + SC_{BC}\Big) \\
SC_{Error} &= SC_{Total} \\
&\quad -\Big(SC_A + SC_B + SC_C + SC_{AB} + SC_{AC} + SC_{BC} + SC_{ABC}\Big) \\
SC_{Total} &= \sum_i\sum_j\sum_k\sum_l y_{ijkl}^2 - C
\end{aligned}$$

donde:

$$C = \frac{1}{abcn}\Big(\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l y_{ijkl}\Big)^2$$

Como ilustración de su aplicabilidad se resolverá el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2 *Las políticas ambientalistas nacionales, está en proceso de controlar la emisión de ruidos por los escapes de los autos, con tal fin se diseños un ensayo en el cual se mide el ruido producido por los escapes en decibels, el tipo de vehículo, el tipo de silenciador y la posición del escape. La información se resume en la tabla 4.12.*

	Tipo			
	Estándar		Otros	
	Izquierda	Derecha	Izquierda	Derecha
Pequeño	810	835	820	825
	820	835	820	825
	820	835	820	825
Mediano	840	845	820	815
	840	855	820	825
	845	850	825	825
Grande	785	760	775	770
	790	760	775	760
	785	770	775	765

Tabla 4.12: Datos sobre ruido

La aplicación de las identidades anteriores, permite construir la tabla de ANOVA asociada al diseño trifactorial de interés.

$$C = \frac{1}{abcn}\left(\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}\right)^2 = \frac{1}{36}(29165)^2 = 23637700{,}69$$

Ahora, cuando se calcula la suma de cuadrados para el tamaño del vehículo se tiene:

$$\begin{aligned} SC_A &= \frac{1}{2*2*3}\left[(9890)^2 + (10005)^2 + (9270)^2\right] - 23637700{,}69 \\ &= 23663752{,}08 - 23637700{,}69 = 26051{,}39 \end{aligned}$$

La suma de cuadrados para el tipo de escape es

$$\begin{aligned} SC_B &= \frac{1}{3*2*3}\left[(14680)^2 + (14485)^2\right] - 23637700{,}69 \\ &= 23638756{,}93 - 23637700{,}69 = 1056{,}24 \end{aligned}$$

La suma de cuadrados de la ubicación del escape es:

$$\begin{aligned} SC_C &= \frac{1}{2*3*3}\left[(14685)^2 + (14580)^2\right] - 23637700{,}69 \\ &= 23637701{,}384 - 23637700{,}69 = 0{,}694 \end{aligned}$$

Las sumas de cuadrados de las interacciones de segundo orden están definidas por:

$$SC_{AB} = 804{,}167 \;\; SC_{AC} = 1293{,}056 \;\; SC_{BC} = 17{,}361$$

La suma de cuadrados de la interacción triple es:

$$SC_{ABC} = 301{,}389$$

La suma de cuadrados total es:

$$SC_{Total} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m Y^2_{ijkm} - C = 23657575 - 23637700{,}69 = 29844{,}304$$

finalmente

$$SC_{eror} = 29844{,}304 - 29524{,}297 = 320{,}007$$

De donde la tabla de ANOVA se resume como:

Fuente de variación	Suma	G.L.	Media	F
Tamaño	26051.39	2	13025.695	976.878
Tipo	1056.24	1	1056.24	79.214
Ubicación	0.694	1	0.694	0.052
Tamaño*Tipo	804.167	2	402.082	30.154
Tamaño*Ubicación	1293.056	2	646.528	48.487
Tipo*Ubicación	17.361	1	17.361	1.302
Tamaño*Tipo*Ubicación	301.389	2	150.694	11.301
Error	320.007	24	13.334	
Total	29844.304	35		

Tabla 4.13: ANOVA diceño con tres factores

Para establecer si el efecto de la interacción o si los efectos principales son estadísticamente significativos, al nivel $\alpha = 5\,\%$ se compara el valor del estadístico observado en cada renglón con el valor crítico:

	F_{Crit}	F_{Obser}	Conclusión
Tamaño	$F_{2,24,0.05} = 3{,}40$	976.878	No aceptar H_0
Tipo	$F_{1,24,0.05} = 4{,}26$	79.214	No aceptar H_0
Ubicación	$F_{1,24,0.05} = 4{,}26$	0.052	Aceptar H_0
Tamaño*Tipo	$F_{2,24,0.05} = 3{,}40$	30.154	No aceptar H_0
Tamaño*Ubicación	$F_{2,24,0.05} = 3{,}40$	48.487	No aceptar H_0
Tipo*Ubicación	$F_{1,24,0.05} = 4{,}26$	1.302	Aceptar H_0
Tamaño*Tipo*Ubicación	$F_{2,24,0.05} = 3{,}40$	11.301	No aceptar H_0

Tabla 4.14: Conclusiones

En conclusión; la interacción de los niveles de los tres factores considerados en el estudio son significativos para determinar la contaminación sónica creada por los escapes de vehículos, al nivel del 5 %

4.4.2. Modelos ANOVA con tres factores aleatorios

Este tipo de modelos es aplicable nuevamente, cuando los niveles de cada factor son seleccionados aleatoriamente, es decir, los niveles de cada factor corresponde a una muestra aleatoria de las subpoblaciones definidas por los niveles de cada factor. El modelo explica las componentes de la varianza de la variable dependiente añadida por cada uno de los tres factores y sus interacciones de orden dos y tres.

Los supuestos teóricos en los cuales se fundamente este modelo son:

$$\begin{aligned} \alpha_i \sim N(0,\sigma_a^2), \qquad & \beta_j \sim N(0,\sigma_b^2),\ \ \gamma_k \sim N(0,\sigma_c^2)\ \ \alpha\beta_{ij} \sim N(0,\sigma_{ab}^2) \\ \alpha\gamma_{ik} \sim N(0,\sigma_{ac}^2), \qquad & \beta\gamma_{jk} \sim N(0,\sigma_{bc}^2),\ \ \alpha\beta\gamma_{ijk} \sim N(0,\sigma_{abc}^2) \end{aligned}$$

Los valores esperados para las sumas cuadráticas de este modelo se resumen en la tabla 4.15

Suma cuadrática	Valor esperado
Factor A	$\sigma^2 + n\sigma_{abc}^2 + nc\sigma_{ab}^2 + nb\sigma_{ac}^2 + nbc\sigma_a^2$
Factor B	$\sigma^2 + nN\sigma_{abc}^2 + nc\sigma_{ab}^2 + na\sigma_{bc}^2 + nac\sigma_b^2$
Factor C	$\sigma^2 + n\sigma_{abc}^2 + nb\sigma_{ac}^2 + na\sigma_{bc}^2 + nab\sigma_c^2$
Interacciones	
AB	$\sigma^2 + n\sigma_{abc}^2 + nc\sigma_{ab}^2$
AC	$\sigma^2 + n\sigma_{abc}^2 + nb\sigma_{ac}^2$
BC	$\sigma^2 + n\sigma_{abc}^2 + na\sigma_{bc}^2$
ABC	$\sigma^2 + n\sigma_{abc}^2$
Error	σ^2

Tabla 4.15: Valores esperados

Al analizar la tabla 4.15 se observa que no existen pruebas exactas, para contrastar la existencia de un componente principal asociado a cada nivel de los factores, ya que al suponer alguno de los componentes de la varianza asociados a los factores, no existen elementos en la tabla que puedan ser comparados para definir un estadístico de prueba en términos de las medias cuadráticas.

En este tipo de modelos los estadísticos de prueba que se pueden definir son aquellos asociados a las interacciones de segundo y tercer orden, los cuales se resumen en la tabla 4.16

A partir de los estadísticos definidos en la tabla anterior se definen de manera análoga al caso de dos factores, los contrastes asociados a la existencia

Fuente de Variación	Medias Cuadráticas	Estadístico F
Factor		
A	MS_A	
B	MS_B	
C	MS_C	
Interacción		
AB	MS_{AB}	$F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_{ABC}}$
AC	MS_{AC}	$F_{AC} = \frac{MS_{AC}}{MS_{EABC}}$
BC	MS_{BC}	$F_{BC} = \frac{MS_{BC}}{MS_{ABC}}$
ABC	MS_{ABC}	$F_{ABC} = \frac{MS_{ABC}}{MS_E}$
Error	MS_E	

Tabla 4.16: Tabla ANOVA con tres factores

de un componente de la varianza asociado a las interacciones de segundo y tercer orden de los niveles de los tres factores.

4.4.3. Modelos ANOVA con tres factores mixtos

Este tipo de modelos se estudian cuando se tienen una o dos subpoblaciones asociadas con los niveles de factores fijos y una o dos muestras aleatorias asociadas a los niveles de factores aleatorios. Así, es posible considerar dos tipos de modelos:

El factor A y el factor B fijos, el factor C aleatorio

Este tipo de modelos es considerado por el investigador cuando:

1. posee información sobre los a niveles del factor A presente en la investigación.

2. la información asociada a los b niveles del factor B son conocidos

3. de la población definida por los c niveles del factor C sólo se tiene información aportada por una muestra aleatoria del mismo, presente en el estudio.

Los fundamentos teóricos en que se basa este tipo de modelos se resumen como sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a}\alpha_i &= \sum_{j=1}^{b}\beta_j = \sum_{i=1}^{a}\alpha\beta_{ij} = \sum_{j=1}^{b}\alpha\beta_{ij} = \sum_{i=1}^{a}\alpha\gamma_{ik} \\ &= \sum_{j=1}^{b}\beta\gamma_{jk} = \sum_{i=1}^{a}\alpha\beta\gamma_{ijk} = \sum_{j=1}^{b}\alpha\beta\gamma_{ijk} = 0\end{aligned}$$

Además se supone los γ_k variables aleatorias independientes distribuidas $N(0,\gamma_c^2)$, se debe hacer notar que no se suponen nulas las expresiones:

$$\sum_{k=1}^{c}\alpha\gamma_{ik}, \sum_{k=1}^{c}\beta\gamma_{ijk}, \sum_{k=1}^{c}\alpha\beta\gamma_{ijk}$$

Los valores esperados para las medias cuadráticas de este modelo se resumen en la tabla 4.17

Suma cuadrática	Valor esperado
Factor A	$\sigma^2 + nb\sigma_{ac}^2 + \frac{nb}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2$
Factor B	$\sigma^2 + na\sigma_{bc}^2 + \frac{nac}{b-1}\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2$
Factor C	$\sigma^2 + nab\sigma_c^2$
Interacciones	
AB	$\sigma^2 + n\sigma_{abc}^2 + \frac{nc}{(a-1)(b-1)}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2$
AC	$\sigma^2 + nb\sigma_{ac}^2$
BC	$\sigma^2 + na\sigma_{bc}^2$
ABC	$\sigma^2 + n\sigma_{abc}^2$
Error	σ^2

Tabla 4.17: Valores esperados

A partir de los valores esperados del modelo y de la tabla general del ANOVA con tres factores es posible formular diferentes contrastes de hipótesis en el modelo ANOVA estudiado acá.

En este modelo es posible definir cada uno y todos los contrastes asociados al efecto primario de cada factor de manera individual, efecto de las interacciones de segundo y de tercer orden

El contraste para el factor A puede formularse como:

$$\begin{aligned}H_0 &: \alpha_i = 0 \quad \forall i \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo}\end{aligned}$$

Si H_0 es cierta, entonces el estadístico de prueba se formulará como

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{AC}} \sim F_{(a-1),(a-1)(b-1)}$$

El contraste para el factor B puede formularse como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_j = 0 \quad \forall j \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Si H_0 es cierta, entonces el estadístico de prueba se formulará como

$$F_B = \frac{MS_B}{MS_{BC}} \sim F_{(b-1),(b-1)(c-1)}$$

El contraste para el factor C puede formularse como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_c^2 = 0 \\ H_1 &: \sigma_c^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Si H_0 es cierta, entonces el estadístico de prueba se formulará como

$$F_c = \frac{MS_C}{MS_E} \sim F_{(c-1),abc(N-1)}$$

De manera similar se formularán los contrastes para las interacciones dobles productos de efectos dos a dos de los niveles de los tres factores, para la interaccion de los niveles de los factores fijos se utiliza en el denominador la media cuadrática de la interacción triple, mientras que para las interacciones de los factores A y B con el factor C se utiliza la media cuadrática del error. Finalmente en el caso de la interacción triple en el denominador se volverá a utilizar la media cuadrárica del error.

La regla de decisión se formula de manera análoga, como se construyó en otros modelos estudiados anteriormente.

La información asociada a los estadísticos de contraste para este modelo se resume en la tabla 4.18

El factor A fijo, el factor B y el factor C aleatorios

Este tipo de modelos se considera cuando en la investigación:

1. se dispone del total de la información asociada a una población definida por los a niveles de un factor fijo A.

Fuente de Variación	Medias Cuadráticas	Estadístico F
Factor		
A	MS_A	$F_A = \frac{MS_A}{MS_{AC}}$
B	MS_B	$F_B = \frac{MS_B}{MS_{BC}}$
C	MS_C	$F_C = \frac{MS_C}{MS_E}$
Interacción		
AB	MS_{AB}	$F_{AB} = \frac{MS_{AB}}{MS_{ABC}}$
AC	MS_{AC}	$F_{AC} = \frac{MS_{AC}}{MS_E}$
BC	MS_{BC}	$F_{BC} = \frac{MS_{BC}}{MS_E}$
ABC	MS_{ABC}	$F_{ABC} = \frac{MS_{ABC}}{MS_E}$
Error	MS_E	

Tabla 4.18: Tabla ANOVA mixto

2. la información asociada a los b niveles de un factor aleatorio B está presente en el estudio mediante una muestra aleatoria de los niveles del factor.

3. la pobalción de los c niveles del factor C está presente en el estudio sólamente mediante una muestra aleatoria de ella.

Los fundamentos teóricos en que se basa este tipo de modelos se resumen como sigue:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{i=1}^{a} \alpha\beta_{ij} = \sum_{i=1}^{a} \alpha\gamma_{ik} = \sum_{i=1}^{a} \alpha\beta\gamma_{ijk} = 0$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_b^2) \quad \gamma_k \sim N(0, \sigma_c^2) \quad \beta\gamma_{jk} \sim N(0, \sigma_{bc}^2)$$

En este caso, debe hacer notar que no se suponen nulas las expresiones:

$$\sum_{j=1}^{c} \alpha\beta_{ij}, \sum_{k=1}^{c} \alpha\gamma_{ik}$$

$$\sum_{j=1}^{b} \alpha\beta\gamma_{ijk}, \sum_{k=1}^{b} \alpha\beta\gamma_{ijk}$$

Los valores esperados para las medias cuadráticas de este modelo se resumen en la tabla 4.19:

Suma cuadrática	Valor esperado
Factor A	$\sigma^2 + n\sigma^2_{abc} + nc\sigma^2_{ab} nb\sigma^2_{ac} + \frac{nbc}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2$
Factor B	$\sigma^2 + na\sigma^2_{bc} + nac\sigma^2_b$
Factor C	$\sigma^2 + na\sigma^2_{bc} + nab\sigma^2_c$
Interacciones	
AB	$\sigma^2 + n\sigma^2_{abc} + nc\sigma^2_{ab}$
AC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{abc} + nb\sigma^2_{ac}$
BC	$\sigma^2 + na\sigma^2_{bc}$
ABC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{abc}$
Error	σ^2

Tabla 4.19: Valores esperados

En ese tipo de modelos no existe una prueba exacta para los efectos del factor fijo, la información resumida del ANOVA, se ilustra en la tabla ANOVA de tres factores. Los contrastes de hipótesis asociados a los efectos primarios, las interacciones de primer, segundo y tercer orden se pueden formular como en los modelos anteriores estudiados en este capítulo; de igual manera las reglas de decisión pueden ser formuladas de manera análoga.

Nota: las identidades utilizadas en los diseños con tres factores de efectos fijo para la estimación de las sumas de cuadrados de los efectos principales, interacciones dobles y triple, pueden ser útiles, salvo adaptaciones de rigor, para estimar la información de la tabla ANOVA para diseños con factores tres aleatorios o mixtos

4.5. Uso del SPSS

Si deseamos realizar una ANOVA unifactorial entregrupos estudiado en el capítulo anterior, o ANOVA de dos o más factores entregrupos el procedimiento indicado por el programa SPSS es en el menú *Analizar* la opción **Modelo lineal general** (MLG).

El procedimiento MLG (Modelo Lineal General) proporciona un análisis de regresión y un ANOVA para una variable dependiente mediante uno o más factores o variables que dividen la población en grupos. Con este procedimiento se pueden contrastar hipótesis nulas sobre los efectos de otras variables en las medias de varias agrupaciones de una única variable dependiente.

Se pueden investigar las interacciones entre los factores así, como los efectos de los factores individuales, algunos de los cuales pueden ser de efectos aleatorios. Además, aunque no es de nuestro interés en este tema, se pueden incluir los efectos de covariables y las interacciones de covariables con los factores. Para el análisis de regresión, las variables independientes (predictoras) se especifican como covariables. Es posible contrastar modelos equilibrados (si todas las casillas del modelo contienen igual número de casos) y no equilibrados. También permite estimar los parámetros del modelo. Además, se encuentran disponibles contrastes *a priori* y *a posteriori*.

4.5.1. Modelo lineal general

El comando Modelo Lineal general presenta cuatro opciones de análisis distintas, las cuales se describen a continuación:

Univariante: proporciona un análisis de regresión y un análisis de varianza para una variable dependiente mediante uno o más factores. Las variables de factor dividen la población en grupos. Con este procedimiento se pueden contrastar hipótesis nulas sobre los efectos de otras variables en las medias de varias agrupaciones de una única variable dependiente. Se pueden investigar las interacciones entre los factores, así, como los efectos de los factores individuales, algunos de los cuales pueden ser aleatorios. Además, se pueden incluir los efectos de las covariables y las interacciones de covariables con los factores. Para el análisis de regresión, las variables independientes (predictoras) se especifican como covariables.

Se pueden contrastar tanto los modelos equilibrados como los no equilibrados. Se considera que un diseño está equilibrado si cada casilla del modelo contiene el mismo número de casos.

Además de contrastar hipótesis se generan estimaciones de los parámetros. También se encuentran disponibles los contrastes de hipótesis de uso más habitual.

Al ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal General --> Univariante
```

se activa la caja de diálogo ilustrada en la figura 4.1

Los campos asociados a esta caja de diálogos son:

Variable dependiente: representa una variable medida en escala de razón o intervalo; sobre la cual se desean hacer predicciones o

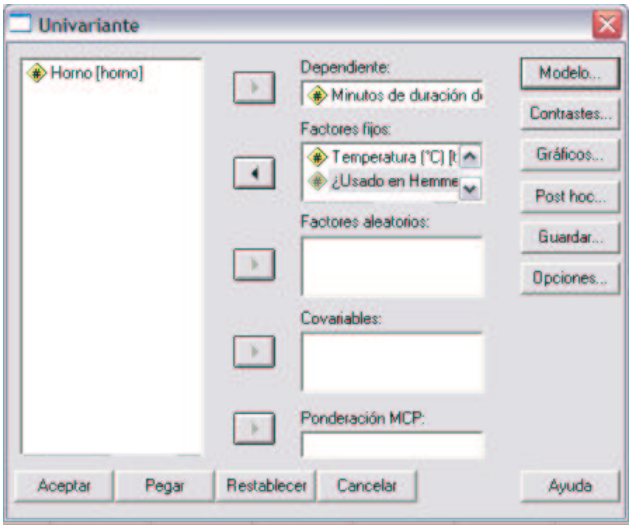

Figura 4.1: MGL univariado

estimar el efecto de los niveles de los factores sobre el promedio de ésta.

Factores fijos: variable categórica sobre la cual se conocen todos los valores que ella asume, con niveles establecidos de manera precisa o vienen dados por la propia naturaleza del factor. Los niveles concretos que toma un factor fijo constituyen la población de niveles sobre los que se realizará inferencia.

Factores aleatorios: es una variable categórica cuyos niveles son seleccionados de forma aleatoria entre todos los posibles niveles del factor. Los niveles concretos que asume un factor con efectos aleatorios constituyen sólo una muestra de la población de niveles sobre los que se desea hacer inferencia

Covariables: en el caso del análisis de COVARIANZA las covariables representan variables numéricas continuas, en el ANOVA este campo se deja vacío.

Ponderación MCP: lista de variables numéricas que contienen los pesos cuando se aplican mínimos cuadrados pesados. El modelo lineal general asume que la varianza de la variable dependiente es la misma en todas las poblaciones objeto de estudio. Cuando éste no es el caso, el método de mínimos cuadrados deja de propor-

cionar estimaciones óptimas. Si estas diferencias de variabilidad se pueden pronosticar a partir de alguna variable, el método mínimo cuadrados ponderados (MCP) permite tener en cuenta esa variable al estimar los parámetros de un modelo lineal.

Modelos: este campo permite ajustar modelos distintos del comportamiento aleatorizado: modelos sin interacción, modelos con bloques aleatorizados, modelos jerárquicos, etc. así, como tipos de suma de cuadrados.

Al ejecutar este campo se activa la pantalla ilustrada en la figura 4.2

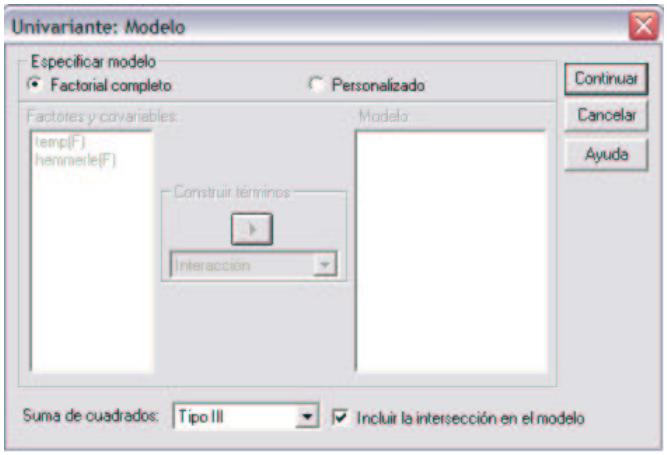

Figura 4.2: MGL univariado: Modelo

Los campos asociados a esta caja de diálogos se describirán a continuación

Factorial completo: opción válida para definir modelos completamente aleatorizados, es decir, modelo en los que intervienen todos los efectos principales previamente definidos como factores y todas las posibles interacciones entre ellos, es la opción por defecto del paquete.

Personalizado: utilizar esta opción para definir modelos distintos a los completamente aleatorizados, Para definir un modelo concreto seleccione en la lista *Factores y covariables* los efectos deseados y trasládelos a la lista *Modelo* y luego seleccione las opciones del menú desplegable *construir términos*, donde se puede seleccionar alguna de las siguientes opciones:

Interacción: puede construir los efectos principales o las interacciones para las variables seleccionadas. Si solicita una interacción de un orden superior al número de variables, SPSS crea un término para la interacción de mayor orden posible correspondiente a las variables seleccionadas. Haga su selección en la lista desplegable.

Efectos principales: puede construir los efectos principales o las interacciones para las variables seleccionadas. Si solicita una interacción de un orden superior al número de variables, SPSS crea un término para la interacción de mayor orden posible correspondiente a las variables seleccionadas. Haga su selección en la lista desplegable.

Otros modelos: permite construir modelos de ANOVA con 2, 3, 4 o 5 maneras de clasificación. Puede construir los efectos principales o las interacciones para las variables seleccionadas. Si solicita una interacción de un orden superior al número de variables, SPSS crea un término para la interacción de mayor orden posible correspondiente a las variables seleccionadas. Haga su selección en la lista desplegable.

Además encontramos los siguientes menú:

Sumas de cuadrados: permite seleccionar uno de los cuatro métodos para dividir la suma de cuadrados

Tipo I: en la suma de cuadrados **Tipo I** conocido como *descomposición Jerárquica* cada término se corrige sólo respecto al término que le precede en el modelo. Se utiliza normalmente en los modelos equilibrados en los que cualquier efecto principal se evalúa antes que cualquier efecto de interacción de primer orden, cualquier efecto de interacción de primer orden se evalúa antes que cualquier interacción de segundo orden y así, sucesivamente. También se utiliza en los modelos anidados en los que el primer efecto especificado está anidado dentro del segundo efecto especificado, el segundo efecto especificado está anidado dentro del tercero, y así, sucesivamente.

Tipo II: la suma de cuadrados **Tipo II** se obtiene teniendo en cuente sólo los efectos pertinente. Un efecto pertinente es un efecto que no está contenido en el efecto que se está evaluando. Para cualesquiera dos efectos

E_i y E_j diremos que E_i est a contenido en E_j si se da alguna de las condiciones siguientes:

1. ambos efectos tienen la misma covariable
2. E_j consta de más efectos que E_i
3. todos los niveles presentes en E_i están en E_j

Si sólo se evalúan efectos principales, es decir, el modelo no incluye ningún término de interacción, cada efecto se ajusta teniendo en cuenta el resto de efectos presentes en el modelo. La suma de cuadrados Tipo II se utiliza normalmente en los modelos equilibrados, en los modelos que sólo tienen efectos principales y también en los modelos diseños anidados.

Tipo III: la suma de cuadrados **Tipo III** se calcula ajustando cada efecto teniendo en cuenta cualquier otro efecto que no lo contenga y de forma independiente de cualquier efecto que lo contenga, si existe. Estas sumas de cuadrados no se alteran por las variaciones del tamaño muestral de las casillas vacías. También son apropiados para cualquier modelo que lo sean las sumas de cuadrados **Tipo I** y **Tipo II**.

Tipo IV: este tipo de sumas de cuadrados son apropiadas para analizar tanto modelos equilibrados como no equilibrados cuando existen casillas vacías.

Incluir intersección en el modelo: desactive esta opción para excluir del modelo el término de la intersección.

Contraste: permite dividir la suma de cuadrados inter-grupos en componentes de tendencia o especificar contrastes *a priori* para que se contrasten mediante el estadístico t.

La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 4.3

Las opciones disponibles son:

Contrastes de desviación: compara el efecto de cada categoría de la variable predictora (o factor), excepto una, con el efecto global. Seleccione **Primera** o **Ultima** como la categoría de referencia omitida.

Simple: compara la media de cada nivel con la media de un nivel especificado. Este tipo de contraste resulta útil cuando existe un grupo de control. Puede seleccionar la primera o la última categoría como referencia.

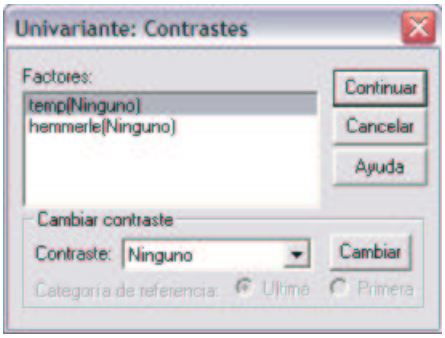

Figura 4.3: MGL univariado: Contraste

Diferencia: compara la media de cada nivel (excepto el primero) con la media de los niveles anteriores (a veces también se denominan contrastes de Helmert inversos).

Helmer: compara la media de cada nivel del factor (excepto el último) con la media de los niveles siguientes.

Repetida: compara la media de cada nivel (excepto el último) con la media del nivel siguiente.

Polinómico: compara el efecto lineal, cuadrático, cúbico, etc. El primer grado de libertad contiene el efecto lineal a través de todas las categorías; el segundo grado de libertad, el efecto cuadrático, y así, sucesivamente. Estos contrastes se utilizan a menudo para estimar las tendencias polinómicas.

Gráficos: las comparaciones múltiples *post hoc* suelen aportar toda la información necesaria para poder interpretar correctamente un efecto principal significativo. Pero no ocurre lo mismo con los efectos de las interacciones. La interpretación correcta de una interacción suele requerir la ayuda de un gráfico de líneas, también conocido como *Gráfico de Perfil*.
En un gáfico de perfil sobre la interacción entre dos factores, en el eje de ordenadas se representa la escala de las medidas de la variable dependiente, en el eje de abscisas se representan los niveles el primer factor, y las líneas del gráfico representan los niveles del segundo factor. Para representar una interacción triple, es necesario hacer un gráfico de perfil para cada interacción doble en cada nivel del tercer factor. Ir más allá de

las interacciones triples no suele tener mucho sentido, entre otras razones, porque resulta nada fácil interpretarlas.
La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 4.4

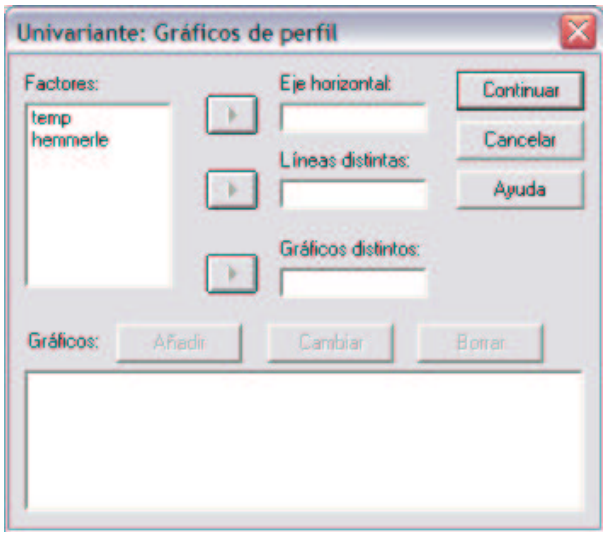

Figura 4.4: MGL univariado: Gráficos

Los campos asociados a la pantalla anterior son:

Línea horizontal: seleccione un factor para definir el eje horizontal.

Líneas distintas: Seleccione un factor para definir las distintas líneas.

Gráficos distintos: seleccione un factor para definir gráficos separados, uno por cada nivel del factor considerado.

Post hoc: si alguno de los estadísticos F correspondientes a los efectos principales resulta significativo puede interesar efectuar comparaciones *post hoc*. Recordemos que el estadístico F del ANOVA únicamente permite contrastar la hipótesis general de que los promedios comparados son iguales. Al rechazar la hipótesis nula, sabemos que existen diferencias, pero no sabemos dónde se encuentran.
Para saber qué medida en concreto difiere de qué otra, se debe utilizar un tipo particular de contraste denominado comparaciones múltiples a *post hoc* o comparaciones *a posteriori*. Estas

comparaciones permiten controlar la *Tasa de error* al efectuar varias comparaciones utilizando las mismas medias.
La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 4.5

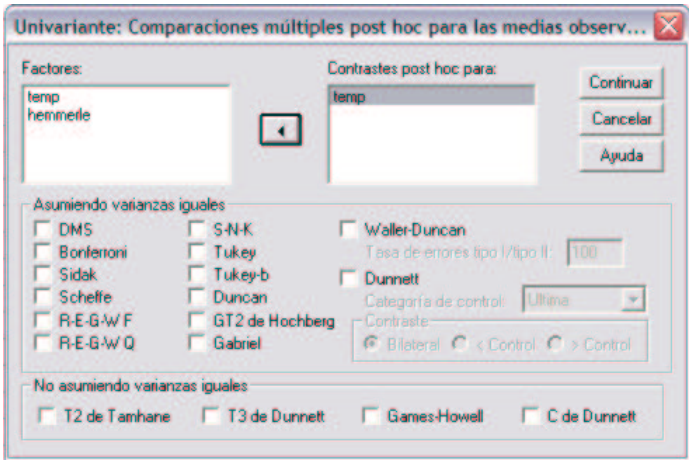

Figura 4.5: MGL univariado: Post Hoc

Dentro de las opciones disponibles en las pruebas *post hoc* se tienen:

Asumiendo varianzas iguales: dispone de una amplia lista de pruebas de hipótesis en el caso que el investigador tenga conocimiento de la homocedasticidad de los datos en los grupos definidos por los factores.

No asumiendo varianzas iguales: este tipo de pruebas son aplicables en el caso en que se ha rechazado la hipótesis nula en la prueba de Levene.

Guardar: permite guardar los valores pronosticados, los residuos y medidas relacionadas como variables nuevas, las cuales son añadidas al archivo de datos de trabajo. La tabla **Notas**, de los resultados, muestra el nombre de cada nueva variable y su contenido.
La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 4.6
Todas las opciones de ese cuadro de diálogo son de interés particular para el *Análisis de regresión*, por esta razón se estudiarán en detalle cuando este tema sea estudiado.

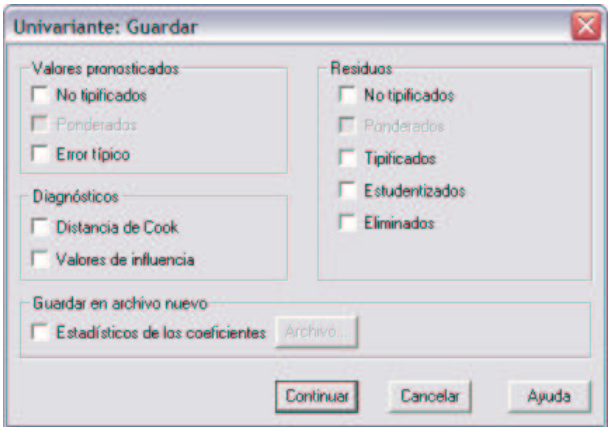

Figura 4.6: MGL univariado: Guardar

Opciones: este campo permite mostrar las medias marginales estimadas, estadísticos descriptivos, estimaciones de los parámetros y estadísticos de diagnóstico. También permite cambiar el nivel alfa, el cual cambia el nivel de los intervalos de confianza.
La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 4.7

Multivariante: proporciona un análisis de regresión y un análisis de varianza para variables múltiples dependientes por una o más covariables o variables de factor. Las variables de factor dividen la población en grupos. Con este procedimiento es posible contrastar hipótesis nulas sobre los efectos de las variables de factor sobre las medias de varias agrupaciones de una distribución conjunta de variables dependientes.

En un modelo multivariado, las sumas de cuadrados debidas a los efectos del modelo y las sumas de cuadrados del error se encuentran en forma de matriz en lugar de en la forma escalar del análisis univariado. Estas matrices se denominan matrices SCPC (sumas de cuadrados y productos cruzados). Si se especifica más de una variable dependiente, se proporciona el análisis multivariado de varianzas usando la traza de Pillai, la lambda de Wilk, la traza de Hotelling y el criterio de mayor raíz de Roy con el estadístico F aproximado, así, como el análisis univariado de varianza para cada variable dependiente.

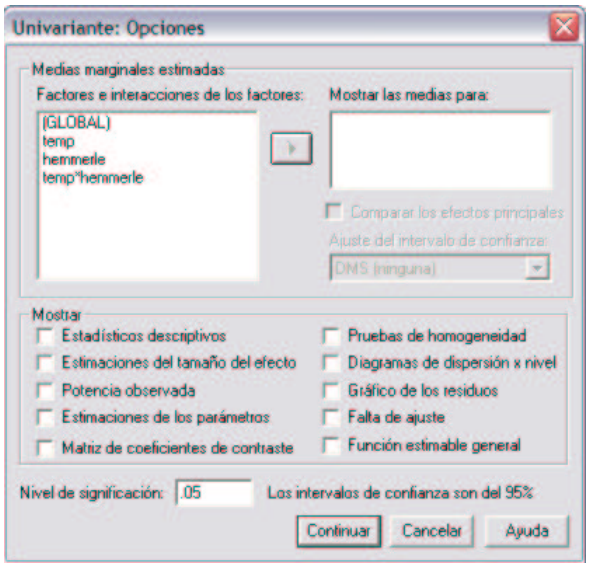

Figura 4.7: MGL univariado: Opciones

Las pruebas de comparaciones múltiples *post hoc* se realizan por separado para cada variable dependiente.

También se hallan disponibles: una matriz SCPC residual, que es una matriz cuadrada de las sumas de cuadrados y los productos cruzados de los residuos; una matriz de covarianza residual, que es la matriz SCPC residual dividida por los grados de libertad de los residuos; y la matriz de correlaciones residual, que es la forma tipificada de la matriz de covarianza residual. El resto es similar al procedimiento anterior.

El estudio detallado de este campo es de interés al estudiar los ANOVA multivariados o MANOVA, los cuales se escapan del alcance de este texto.

Medidas repetidas: analiza grupos de variables dependientes relacionadas que representan diferentes medidas del mismo atributo. Permite definir uno o varios factores intrasujetos (no confundir con las variables existentes), donde cada factor constituye un nivel dentro del factor precedente. Si los sujetos se comparan en más de una medida cada vez, hemos de seleccionar Medida para definirlas. El nombre de las medidas no existe como un nombre de variable en el propio archivo de datos sino que se define aquí. Este comando se estudiará en detalles en el siguiente capítulo.

Componentes de la varianza: estima la contribución de cada efecto aleatorio, para modelos de efectos mixtos, a la varianza de la variable dependiente. Este procedimiento resulta de interés para el análisis de modelos mixtos, como los diseños split-plot, los diseños de medidas repetidas univariados y los diseños de bloques aleatorios. Al calcular las componentes de la varianza, se puede determinar dónde centrar la atención para reducir la varianza. Se dispone de cuatro métodos diferentes para estimar las componentes de la varianza:

Estimador mínimo no cuadrático insesgado (EMNCI): genera estimaciones insesgadas de norma mínima que son invariantes respecto a los efectos fijos; las estimaciones tienen varianza mínima local si la variable dependiente es normal.

Análisis de varianza (ANOVA): iguala las medias cuadráticas esperadas de los efectos aleatorios (incluyendo el término residual) al valor observado de sus medias cuadráticas y resuelve el sistema de ecuaciones lineales resultante respecto a las componentes de la varianza. Las medias cuadráticas esperadas se calculan basándose en el tipo de suma de cuadrados elegido.

Máxima verosimilitud (MV, ML): los métodos de máxima verosimilitud tratan de estimar los valores de los parámetros que darían la verosimilitud más alta de observar los datos que realmente se han observado. Estos métodos con frecuencia requieren soluciones iterativas.

Máxima verosimilitud restringida (MVR o RML): las estimaciones de las componentes de la varianza debidas a los efectos aleatorios se basan en los residuos calculados después de ajustar los efectos fijos del modelo. Este método es iterativo.

La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 4.8

Además, existen diversas especificaciones para los diferentes métodos. Los resultados por defecto para todos los métodos incluyen las estimaciones de componentes de la varianza. Si se usa el método MV o el método MVR, se mostrará también una tabla con la matriz de covarianza asintótica. Otros resultados disponibles incluyen una tabla de ANOVA y las medias cuadráticas esperadas para el método ANOVA, y la historia de iteraciones para los métodos MV y MVR. Este procedimiento es totalmente compatible con el procedimiento MLG (Modelo Lineal General). Los campos asociados a este comando son similares a los estudiados en comandos anteriores.

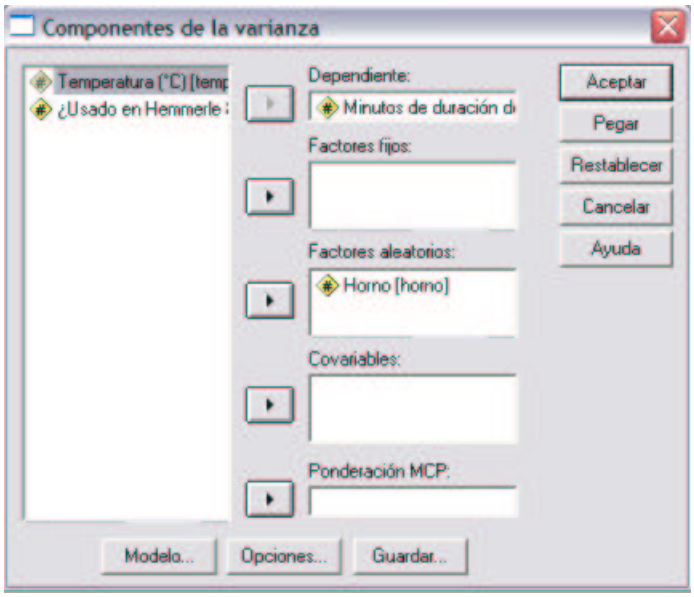

Figura 4.8: MGL: Componentes de la varianza

4.6. Solución de problemas

Problema 4.1 *El archivo Tóxicos.sav resume los tiempos de supervivencia en horas, de animales a los que se les ha suministrado al azar, veneno de las tres serpientes más comunes de la ragión y los cuatro antídotos. ¿Se desea determinar que antídoto es el adecuado para cada veneno?.*

El diseño planteado en el enunciada del problema es del tipo factorial con dos factores: Venenos con tres niveles correspondientes a los tres tipos de serpientes, Antídotos con cuatro niveles correspondientes a los cuatro tipo de antídotos empleados en el diseño, las unidades experimentales corresponde a los animales inocubados con los venenos de serpiente. El modelo matemático que explica el tiempo de supervivencia promedio es:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

con: $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, \cdots, 6$, μ el promedio global de los tiempos de supervivencia, α_i el efecto promedio asociado al antídoto i, β_j el efecto asociado al tipo de serpiente j, $(\alpha\beta)_{ij}$ el efecto conjunto del antídoto i y la serpiente j sobre el tiempo promedio de supervivencia, ε_{ijk} el residuo

	Antídoto							
Veneno	A		B		C		D	
I	3.8	4.6	8.3	10	4.6	4.8	7.2	4.8
	4.8	4.6	8.7	8.9	5.7	6.4	6.7	5.8
	5.2	4.4	10.0	9.7	5.8	6.6	6.4	5.8
II	4.1	3.7	9.2	8.6	4.1	4.3	6.3	10.1
	2.9	3.6	5.4	7.2	4.7	4.2	8.2	7.9
	3.4	3.8	4.9	5.3	3.8	3.1	9.2	8.9
II	3.1	2.5	3.5	3.4	2.6	2.5	3.1	3.7
	2.4	2.1	3.6	3.77	2.3	2.6	3.4	3.6
	3.0	2.1	3.1	4.2	2.1	2.5	3.3	3.0

Tabla 4.20: Tiempos de supervivencia

del modelo lineal. Antes de establecer cual es el antídoto más eficiente en el tratamiento de emponsoñaniento por ofidios, es recomendable si existe algún efecto conjunto asociado a la interacción antídoto* serpiente. Para tal fin es necesario ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo Lineal Generalizado --> Univariado
```

En la caja de diálogo asociada se seleccionan los campos:

```
  Dependiente: Tiempo
  Factores fijos: Antídoto, Veneno
  Modelo: Factorial Completo
   Continuar
Aceptar
```

La información asociada a la secuencia de comando se reporta en la tabla 4.21

Al leer la columna Sig. asociada a la fila Antidoto*Veneno se observa que el $p - valor = 0{,}238$, el cual es mayor al nivel de significancia $\alpha = 5\,\%$, entonces se acepta la hipótesis nula del contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

es decir, al nivel de significancia del $5\,\%$ no existe efecto conjunto de las interacciones entre antics y serpientes.

Aceptada H_0 en el contraste anterior, se debe proceder a correr el análisis considerando un modelo lineal sin interacción entre los niveles de los tratamientos. En el campo *Modelo* seleccionamos las opciones:

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig
Modelo corregido	237.025	11	21.548	7.606	.000
Intersección	2365.573	1	2365.573	835.047	.000
Veneno	138.197	2	69.098	24.392	.000
Antídoto	75.402	3	25.134	8.872	.000
Veneno*Antidoto	23.426	6	3.904	1.378	.238
Error	169.972	60	2.833		
Total	2772.570	72			
Total corregido	406.997	71			

Tabla 4.21: Modelo Factorial Completa

```
Construir términos:
      Efectos principales: Veneno, Antídoto
   Aceptar
```

Luego en el campo *Post hot* se seleccionan las opciones:

```
Pruebas Post hoc para: Venenos
                       Antídotos
 Tukey
Continuar
```

Al ejecutar el campo *Aceptar*, se obtiene el reporte siguiente.

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	sig
Modelo corregido	213.598	5	42.720	14.579	.000
Intersección	2365.573	1	2365.573	807.288	.000
Veneno	138.197	2	69.098	23.581	.000
Antídoto	75.402	3	25.134	8.577	.000
Error	193.398	66	2.930		
Total	2772.570	72			
Total corregido	406.997	71			

Tabla 4.22: Efectos principales

La tabla 4.22 resume el ANOVA para el diseño Personalizado sin interacción, se observa que el valor de la suma de cuadrados asociado a la interacción el la tabla 4.21 (23.426) se acumula a la suma de cuadrados del error, el $p - valor$ asociado a la línea Veneno es igual a 0.000 al igual que la significancia de la fila Antídoto, es decir, se rechazan las hipótesis nulas del contraste asociado al efecto del antídoto y del veneno. Por tal razón el tipo

de serpiente y el tipo de antídoto empleado, afecta al tiempo promedio de supervivencia de los animales que sufren emponsoñamiento.

Para conocer cual de las serpientes presenta mayor emponsoñamiento, es necesario ubicar aquel veneno con diferencias de medias todas negativas, en la tabla 4.23.

					Intervalo 95 %	
Veneno I	Veneno J	Diferencia	error	Sig	Límite Inferior	Límite Superior
1	2	.7792	.49416	.263	-.4057	1.9640
	3	3.2500	.49416	.000	2.0652	4.4348
2	1	-.7792	.49416	.263	-1.9640	.4057
	3	2.4708	.49416	.000	1.2860	3.6557
3	1	-3.2500	.49416	.000	-4.4348	-2.0652
	2	-2.4708	.49416	.000	-3.6557	-1.2860

Tabla 4.23: Prueba para venenos

Las serpientes tipo 3, presentan emponsoñamiento altamente tóxico, ya que el signo negativo en las diferencias de medias del veneno 3 con los otros dos tipos de venenos indica menor tiempo de supervivencia en los animales.

Mientras que las serpientes tipo 1 son aquellas cuyo veneno es menos fuerte, dado que los tiempos de supervivencia de animales con este tipo de emponsoñamiento, son en promedio mayor a los otros tipo de venenos.

Los tiempos promedios de supervivencia asociados a las mordeduras de serpiente catalogadas tipo 3, presentan diferencias significacativas con sus otros pares considerados en el estudio, sin embargo, las serpientes tipo 1 y tipo 2 presentas similitud en los tiempos promedios de supervivencia de los afectados.

La efectividad del tipo de antídoto se mide en función del mayor tiempo promedio de supervivencia de los animales, al leer la columna diferencias en la tabla 4.24, en la cual se observa que las diferencias de medias para el antídoto 2 son todas positivas, lo cual indica que estadísticamente al nivel del 5 % el antídoto 2 es el más eficiente para tratar el emposoñamiento por mordeduras de las tres serpiente más comunes en la región donde se localizó el ensayo.

El antídoto 1 es el menos eficiente, puesto que los tiempos promedios de supervivencia de los animales afectos por mordeduras de serpientes, tratados con éste, son menores, la columna identificada como diferencias de medias, son todas negativas.

Problema 4.2 *La Oficina de Pasantía del departamento de Informática, de una Universidad Publíca, desea realizar una investigación para comprobar se*

					Intervalo 95 %	
					Límite	Límite
Antídoto I	Antídoto J	Diferencia	error	Sig	Inferior	Superior
1	2	-2.7444*	.57060	.000	-4.2484	-1.2405
	3	-.6556	.57060	.661	-2.1595	.8484
	4	-1.4611	.57060	.060	-2.9651	.0428
2	1	2.7444*	.57060	.000	1.2405	4.2484
	3	2.0889*	.57060	.003	.5849	3.5928
	4	1.2833	.57060	.121	-.2206	2.7873
3	1	.6556	.57060	.661	-.8484	2.1595
	2	-2.0889*	.57060	.003	-3.5928	-.5849
	4	-.8056	.57060	.497	-2.3095	.6984
4	1	1.4611	.57060	.060	-.0428	2.9651
	2	-1.2833	.57060	.121	-2.7873	.2206
	3	.8056	.57060	.497	-.6984	2.3095

Tabla 4.24: Prueba para los antídotos

existen diferencias apreciables en los salarios que perciben los pasantes de Ingeniería en Informática al hacer sus prácticas en empresas. Se seleccionaron tres empresas al azar, en cada una de ella se observó el salario que percibían cuatro estudiantes varones y cuatro hembras. Estos datos se resumen en la tabla 4.25. ¿Puede afirmarse que las empresas pagan más a los hombres que a las mujeres?

	Empresa					
	A		B		C	
Mujer	780	860	765	830	830	865
	795	765	800	785	860	810
Hombre	825	880	910	850	940	860
	915	925	930	900	895	955

Tabla 4.25: Salarios

Los factores de interés en el diseño son el sexo del pasante por tanto con dos niveles fijos y la empresa que acoge al pasante para realizar sus prácticas. Como sólo se consideran algunas empresas seleccionadas al azar, es un factor aleatorio, en otras palabras es un diseño factorial mixto. El número de observaciones o replicas por cada tratamiento es de cuatro.

El modelo matemático que explica el salario en función de los efectos de los factores de interés se expresa como:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2; j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3, 4$$

bajo los supuestos:

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 0 \qquad \beta_i \sim N(0, \sigma^2_\beta) \text{ independientes}$$
$$(\alpha\beta)_{ij} \sim N(0, \sigma^2_{\alpha\beta}) \qquad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes}$$

La secuencia de comandos que permite realizar el análisis estadístico de los datos generados del diseño experimental es:

```
Analizar --> Modelo lineal univariado
```

Los comandos de interés seleccionados son:

```
Dependiente: Salario
Factor fijo: sexo
Factor aleatorio: Empresa
Modelos:
      Factorial completo
   Continuar
Aceptar
```

El reporte de asociado es la tabla 4.26.

Fuente		Sumas(III)	GL.	Medias	F	Sig.
Inntersección	Hipótesis	1.76E7	1	1.76E7	6311.96	.000
	Error	5564.58	2	2782.29a		
Sexo	Hipótesis	45066.67	1	45066.67	92.25	.011
	Error	977.08	2	488.54		
Empresa	Hipótesis	5564.58	2	2782.29	5.70	.149
	Error	977.08	2	488.54		
Sexo*Empresa	Hipótesis	977.08	2	488.54	.36	.706
	Error	24737.50	18	1374.31		

Tabla 4.26: Prueba efectos intra-sujetos

El $p - valor$ asociado al estadístico del contraste de hipótesis:

$$H_0 \;:\; \sigma^2_{(\alpha\beta_{ij})} = 0$$
$$H_1 \;:\; \sigma^2_{(\alpha\beta)_{ij}} > 0$$

es igual a 0.706, es decir, mayor que $\alpha = 5\,\%$ por tal razón se acepta la hipótesis nulo concluyendo que la interacción de los factores no aporta efectos en la varianza total de la variable dependiente.

Rechazada la hipótesis acerca de la existencia de un efecto asociado a la interacción del sexo y de la empresa con el salario percibió por los pasantes, es necesario realizar modificaciones en el modelo seleccionado; se debe correr un nuevo modelo en el cual sólo serán considerados los efectos principales asociados a los factores. La secuencia de comandos ejecutada para el nuevo modelo es:

```
Modelo:
     Personalizado:
                  Construcción de términos
                  Efectos Principales: Sexo, Empresa
      Continuar
 Post hoc:
         Prueba post hoc para: Sexo
         Tukey
      Continuar
 Aceptar
```

El reporte se resume en dos tablas, la tabla 4.27 contiene la prueba de efectos principales intra-sujetos, el $p - valor$ asociado a la fila *Empresas* es igual a 0.141, por lo tanto el factor aleatorio no genera efectos sobre la varianza de la variable respuesta. Sin embargo, sí se observan diferencias entre los salarios percibidos por hombres y mujeres, ya que el $p - valor$ asociado al estadístico de prueba es 0.000 menor que $\alpha = 0{,}05$.

Fuente		Sumas(III)	GL.	Medias	F	Sig.
Inntersección	Hipótesis	1.76E7	1	1.76E7	6311.96	.000
	Error	5564.58	2	2782.292a		
Sexo	Hipótesis	45066.67	1	45066.667	35.051	.000
	Error	25714.58	20	1285.729b		
Empresa	Hipótesis	5564.58	2	2782.292	2.164	.141
	Error	25714.58	20	1285.729b		

Tabla 4.27: Prueba efectos principales intra-sujetos

Los valores estimados de los parámetros del modelo lineal son:

$$\widehat{\mu} = 855{,}42 \qquad \widehat{\alpha}_1 = 898{,}75 \quad \widehat{\alpha}_2 = 812{,}08$$
$$\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} = 0 \qquad \widehat{\sigma}^2_\beta = 0 \quad \widehat{\sigma}^2 = 1285{,}729$$

La tabla 4.28 reporta los componentes de la varianza asociados al diseño.

	Componentes de la varianza		
Origen	Var(empresa)	Var(Error)	Término cuadrático
Intersección	8.000	1.000	Intersección, Sexo
Sexo	.000	1.000	Sexo
Empresa	8.000	1.000	
Error	.000	1.000	

Tabla 4.28: Medias cuadráticas esperadas

Luego los valores esperados de las medias cuadráticas se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} E(MC_{Sexo}) &= \sigma^2 + 12\sum_{i=1}^{2}\alpha_i \\ E(MC_{Empresa}) &= 8\sigma^2_\beta + \sigma^2 \end{aligned}$$

Establecida la existencia de diferencias en los salarios promedios de hombres y mujeres, se estiman los estadísticos de grupos, resumidos en la tabla 4.29.

	Sexo	N	Media	Desv. Típica	Error
Salario	Hombre	12	898.75	38.854	11.216
	Mujer	12	812.08	36.523	10.543

Tabla 4.29: Estadísticos de grupo

Los valores observados para las medias de hombres y mujeres sugiere que el salario promedio de los hombres es superior al de las mujeres, para tal fin se realiza un contraste para dos muestras independiente mediante la prueba t.

La primera tabla reportada resume el contraste para la igualdad de las varianzas mediante el estadístico de Levene tabla 4.30.

	Estadístico	Sig.
Salario	.000	.986

Tabla 4.30: Prueba de Levene

						Intervalo 95 %	
						Límite	Límite
	t	GL.	Sig.	Diferencias	Error	Inferior	Superior
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	5.630	22	.000	86.667	15.394	54.742	118.591
$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	5.630	21.916	.000	86.667	15.394	54.735	118.598

Tabla 4.31: Prueba t para dos muestras independientes

Como el $p - valor$ del contraste es 0.986 mayor que $\alpha = 0{,}05$, entonces se acepta la homogeneidad de las varianzas de los salarios en los grupos definidos por hombres y mujeres.

El $p - valor$ del estadístico de prueba para el contraste de hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_{Hombres} = \mu_{Mujeres} \\ H_1 &: \mu_{Hombres} \neq \mu_{Mujeres} \end{aligned}$$

es igual a 0.000, ver primera fila de la tabla 4.31.

Pero realmente, el contraste de interés actual es:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_{Hombres} \leq \mu_{Mujeres} \\ H_1 &: \mu_{Hombres} > \mu_{Mujeres} \end{aligned}$$

cuyo $p - valor$ se define como $\frac{0{,}000}{2} = 0{,}00$, entonces se rechaza la hipótesis nula, en conclusión: el salario promedio de los hombres es superior al de las mujeres.

Capítulo 5

Diseños Factoriales 2^k y 3^k

5.1. Preliminares

Cuando el objetivo es medir cómo influyen k factores en un proceso y descubrir si interaccionan entre ellos, el diseño factorial completo 2^k es la estrategia experimental óptima. Este diseño permite explorar una zona escogida del dominio experimental y encontrar una dirección prometedora para la optimización posterior.

El término experimento factorial o arreglo factorial hace referencia a la constitución de los tratamientos o combinaciones de tratamientos que se desean comparar. Este término no afecta lo que se conoce como dise no de tratamientos, pues éste se refiere a la selección de factores que se desean estudiar, los niveles de los factores a ensayar y combinación de éstos.

De esta forma se debe dejar en claro que el dise no de tratamientos es independiente del dise no experimental, el cual hace referencia a la manera en que los tratamientos se aleatorizan a las diferentes unidades experimentales y la forma como se controla la variabilidad natural de las mismas. Así, el dise no experimental puede ser completamente aleatorizado, bloques completamente aleatorizados, cuadros latinos, etc., y para cada uno de éstos dise nos se puede tener un arreglo factorial.

En muchos experimentos el éxito o fracaso del ensayo depende mas de la selección de los tratamientos que se desea comparar que de la elección del dise no. Sin embargo, la selección de ambos (del dise no y de los tratamientos) es importante por tanto ninguno de los dos debe descuidarse en la planeación del experimento.

En un experimento factorial se investigan simultáneamente los efectos de cierto número de diferentes factores. La necesidad de estudiar conjuntamente varios factores obedece principalmente a dos razones:

1. Encontrar un modelo que describa el comportamiento general del fenómeno en estudio. Esto se restringe al rango de variación de los niveles de los factores.

2. Optimizar la respuesta o variable independiente, es decir, encontrar la combinación de niveles de los factores que optimizan esa respuesta.

Los tratamientos en el análisis factorial consisten en todas las combinaciones se forman de los distintos niveles de los factores. Por ello, la característica esencial que hace necesario el estudio conjunto de factores es la posibilidad de que el efecto de un factor cambie en presencia de los niveles de otro factor, es decir, que los factores interactúen, lo cual conlleva al concepto de interacción entre ellos.

Si se estudia un factor en forma separada el resultado puede ser diferente al que daría con un estudio conjunto, y es mas difícil describir el comportamiento general o encontrar el óptimo.

Si el tiempo de obtención de la variable respuesta es corto y barato se puede seguir este procedimiento secuencial, en caso contrario es más conveniente el uso de experimentos factoriales.

Los experimentos agrícolas tienen esta característica, de ahí, que estas técnicas se desarrollaron en el sector agropecuario. Esto se debió a los trabajos de Fisher y Yates (1920-1930) en la estación agrícola experimental de Rothamsted en Inglaterra.

Los experimentos factoriales deben ser usados cuando los factores no son independientes.

Algunas de las ventajas de esta clase de experimentos son:

1. Al obtener información sobre varios factores sin aumentar el tama no del experimento hay economía en el material experimental.

2. Se amplia la base de la inferencia en relación a un factor ya que se estudia en las diferentes condiciones representadas por los niveles de otros factores.

3. Se puede obtener una estimación de la interacción de los efectos, o sea, se determina el grado y la forma en la cual se modifica el efecto de un factor en presencia de los niveles de los otros factores.

4. El conjunto de los tratamientos en el dise no factorial es óptimo para estudiar efectos principales e interacciones.

Y entre las desventajas más importantes se destacan:

1. El gran número de combinaciones de tratamientos cuando se estudian muchos factores a muchos niveles. Esto tiene dos efectos:

   a) Si se desea usar bloques completos es difícil encontrar grupos de unidades experimentales homogéneos para asignar todos los tratamientos, esto se puede eliminar usando el principio de confusión.

   b) Se aumenta el costo del experimento al tener muchas unidades experimentales, problema que se minimiza usando experimentos factoriales fraccionados, en este caso, se prueba solo una parte de los tratamientos posibles.

2. Difícil interpretación principalmente de las interacciones de orden superior (interacciones de más de tres efectos).

Los factores se acostumbran a denotar con letras mayúsculas: $A; B; C; \cdots$, los niveles de un factor se identifican con subíndices $a_i, b_j, c_k, \cdots$ y los tratamientos se denotan de varias formas:

1. Con letras y números, ejemplo: $a_1b_2c_3, a_1b_0c_1, \cdots$, teniendo entonces

$$\begin{aligned} a_1b_2c_3 &= T_1 \\ a_1b_0c_1 &= T_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

2. Únicamente con los números y el orden se indica el factor. Así, los tratamientos anteriores son: $123 = T_1, 101 = T_2, \cdots$

Es conveniente comenzar la numeración de niveles en cero, en el caso de factores cuantitativos el nivel cero es el mas bajo (generalmente ausencia de tratamiento). Los efectos de un factorial que se estudian son principales y efectos de interacción y se denotan por las letras como: $A; B; C; AB; ABC \cdots$.

La interacción entre los factores se presenta cuando los niveles de un factor no producen medias poblacionales que guarden las mismas relaciones al considerar cada uno de los niveles del segundo factor. Este resultado se ilustra gráficamente en la figura 5.1. Si las gráficas obtenidas estuvieran conformadas por las líneas b_0, b_{01} y b_0, b_{01} y b_{02} no se tendría interacción. El efecto de cambiar los niveles de A sería el mismo para todos los niveles de B. Si las líneas son las dadas por b_0, b_1 y b_0, b_1 y b_2 (líneas continuas) el efecto de cambio de niveles de A sobre la respuesta es diferente dependiendo de los niveles de B (hay interacción) y viceversa.

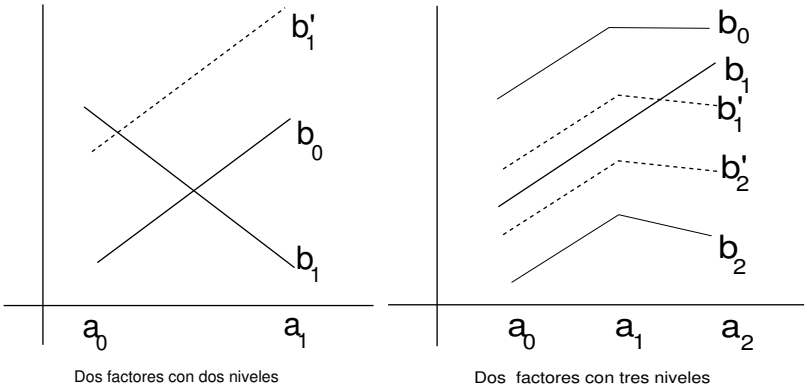

Figura 5.1: Interacción entre factores

Para definir la interacción entre tres factores, se toma un patrón de interacción entre dos de ellos y si este patrón cambia al considerar los niveles del tercer factor, se tiene interacción entre los tres factores.

Para estudiar el efecto de una interacción se debe evaluar primero la hipótesis de no interacción, la cual se prueba con una razón de cuadrados medios, si la hipótesis no se rechaza se considera que no hay interacción. Si la hipótesis se rechaza entonces mediante pruebas de comparación múltiple se debe investigar el patrón de la interacción.

5.2. Diseños factoriales 2^k

Los dise nos factoriales se usan ampliamente en experimentos que incluyen varios factores cuando es necesario estudiar el efecto conjunto de los factores sobre la respuesta. hay varios casos especiales del dise no factorial que son importantes debido a su uso generalizado en el trabajo de investigación y porque constituyen las bases de otros dise nos de gran valor práctico.

El más importante de estos casos especiales es el de k factores, cada uno con sólo dos niveles. Si todos los factores se estudian con dos niveles, se dice que es un experimento factorial 2^k. Los niveles de éstos factores pueden ser cuantitativos o bien cualitativos.

La selección de únicamente dos niveles puede conducir a inferencias erróneas. Así, cuando la respuesta se afecta en forma cuadrática, los niveles estudiados pueden indicar que no hay efecto del factor. Este es un riesgo que se corre al usar dos niveles por factor.

Los métodos de análisis que se han presentado hasta este punto pueden generalizarse para el caso de un dise no factorial 2^k, es decir, un dise no con k factores que tienen dos niveles cada uno. El modelo estadístico incluye k efectos principales, $\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$ interacciones de dos factores, $\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix}$ interacciones de tres factores, y una interacción de k factores. Esto significa, que el modelo completo contendría $2^k - 1$ efectos

El modelo matemático que explica la respuesta esperada en términos de los efectos de lo k factores, es similar al estudiado en diseños con k factores, salvo que, cada factor presenta sólo 2 niveles.

El primer paso al trabajar con esta clase de experimentos es estimar los efectos de los factores y examinar sus signos y magnitudes. De este manera, el experimentador obtiene información respecto de los factores y las interacciones que pueden ser importantes, en qué direcciones deberán ajustarse estos factores para mejorar la respuesta. Para formar el modelo inicial del experimento, por lo general se elige el modelo completo, en el cual se involucran todos lo efectos principales y las interacciones, siempre que se haya hecho al menos una réplica.

En general, el contraste del efecto $AB \cdots K$ se determina expandiendo el miembro derecho de la siguiente manera:

$$Contraste_{ABC\cdots K} = (a \pm 1)(b \pm 1) \cdots (k \pm 1)$$

Donde el signo de cada grupo en paréntesis es negativo si el factor está incluido en el efecto y es positivo si el factor no está incluido.

Una vez que se han obtenido los contrastes de los efectos, pueden estimarse los efectos involucrados en el modelo completo y las sumas de cuadrados asociadas, de acuerdo con:

$$Efecto = \frac{1}{2^{k-1}r} Contraste = \frac{1}{2^{k-1}r}(a \pm 1)(b \pm 1) \cdots (k \pm 1)$$

y

$$SS(Efecto) = \frac{1}{2^k r}[(a \pm 1)(b \pm 1) \cdots (k \pm 1)]^2 = r2^{k-2}[Efecto]^2$$

Con base en éstos resultados se puede determinar cuáles efectos de los factores son diferentes de cero. A continuación se presenta cómo calcular el error estándar de los efectos y cómo usarlo para construir intervalos de confianza para los efectos.

Si $y_{i1}, y_{i2}, \cdots, y_{ir}$ son las observaciones del i-ésimo tratamiento, entonces

$$S_i = \frac{1}{r-1} \sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \overline{y}_{\cdot\cdot})^2 \quad i = 1, 2, \cdots, 2^k$$

es una estimación de la varianza del i-ésimo tratamiento. Las estimaciones de la varianza del dise no 2^k pueden combinarse para dar una estimación de la varianza global:

$$S^2 = MC_E = \frac{1}{2^k(r-1)} \sum_{i=1}^{2^k} \sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \overline{y}_{\cdot\cdot})^2$$

La varianza de la estimación de cada efecto es:

$$Var(Efecto) = Var\left(\frac{Contraste}{2^{k-1}r}\right) = \frac{1}{2^{2k-2}r^2} Var(Contraste)$$

Cada contraste es una combinación lineal de los 2^k totales de los tratamientos, y cada total tiene r observaciones. Por consiguiente:

$$Var(Contraste) = r2^k\sigma^2$$

De este modo:

$$Var(Efecto) = \frac{1}{2^{2k-2}r^2} r2^k\sigma^2 = \frac{1}{2^{k-2}r}\sigma^2$$

El error estándar estimado se encuentra sacando raíz cuadrada de esta última expresión y sustituyendo σ^2 por su estimación MCE:

$$se(Efecto) = \sqrt{\frac{MC_E}{2^{k-2}r}}$$

Así, para el contraste de hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 &: ABC\cdots K = 0 \\ H_1 &: ABC\cdots K \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba bajo H_0 se define:

$$F = \frac{MC_{Efecto}}{MC_E} \sim F_{1,2^k(r-1)}$$

Se rechaza H_0 si el $p-valor$ del contraste es menor que el nivel de significancia fijado por el investigador; y se concluye que este efecto es importante.

De la misma forma, los intervalos de confianza de $100(1-\alpha)\,\%$ para los efectos (por ejemplo, $AB\cdots K$) se calculan a partir de

$$Efecto \pm t_{2^k(r-1),1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{MC_E}{2^{k-2}r}}$$

En la tabla 5.1 se presenta la forma general del análisis de varianza para el dise no factorial 2^k con r réplicas, de acuerdo a los resultados presentados anteriormente.

Fuente		Sumas	GL.	Media	F	Sig.
Tratamientos		SS_T	2^k-1	$\frac{SS_T}{2^k-1}$	F_T	p
	A	SS_A	1	SS_A	F_A	p
	B	SS_B	1	SS_B	F_B	p
efectos	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
principales	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	K	SS_K	1	SS_K	F_K	p
efectos	AB	SS_{AB}	1	SS_{AB}	F_{AB}	p
de orden 2	AC	SS_{AC}	1	SS_{AC}	F_{AC}	p
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	JK	SS_{JK}	1			
efectos	ABC	SS_{ABC}	1	SS_{ABC}	F_3	p
de orden 3	ABD	SS_{ABD}	1	SS_{ABD}	$F_{3'}$	p
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	IJK	SS_{IJK}	1	SS_{IJK}	$F_{3'}$	p
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
efecto de orden k	$ABC\cdots K$	$SS_{ABD\cdots k}$	1	$SS_{AB\cdots K}$	F_K	p
	Error	SS_E	$2^k(r-1)$	$\frac{SS_E}{2^k(r-1)}$	F_E	p
Total	SS_{Total}	$2^k r-1$				

Tabla 5.1: ANOVA para diseños 2^k

5.2.1. Diseños 2^2

El primer dise no del tipo 2^k es el que sólo tiene dos factores, por ejemplo, A y B; cada uno tiene dos niveles. A este dise no se le llama dise no factorial 2^2.

El modelo estadístico para este modelo sería:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk} \;\; i,j = 0,1, k = 1,2,\cdots,n$$

para diseños completamente aleatorizados, mientras que en diseños en bloques al azar:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \;\; i, j = 0, 1, k = 1, 2, \cdots, b$$

donde b es el número de bloques. Los diseños 2^2 se acostumbran representar mediante cuadrados como el de la figura 5.2

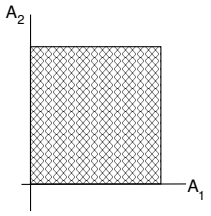

Figura 5.2: Diseño 2^2

Los niveles de los factores pueden denominarse arbitrariamente *bajo* y *alto*.

Se tienen cuatro tratamientos que se denotan por cualquiera de los siguientes símbolos resumidos en la tabla 5.2.

Tratamientos	Efectos		
1	(1)	a_0b_0	00
2	a	a_1b_0	10
3	b	a_0b_1	01
4	ab	a_1b_1	11

Tabla 5.2: Tabla de tratamientos

Los efectos se definen con base en las tablas de tratamientos, como se presenta a continuación:

		B	
		b_0Bajo	$b_1$alto
A	a_0Bajo	Ta_0b_0	Ta_0b_1
	$a_1$alto	Ta_1b_0	Ta_1b_1

Tabla 5.3: Tabla de efectos

y con base en estos totales se obtiene:

$$\begin{aligned} A_{i=0} &= T_{a_0b_0} + T_{a_0b_1} = 00 + 01 = (1) + b \\ A_{i=1} &= T_{a_1b_0} + T_{a_1b_1} = 10 + 11 = a + ab \end{aligned}$$

donde $T_{a_ib_j}$ es el total de todas las unidades experimentales que reciben el tratamiento ij. $00, 01, 10, 11$, al igual que $(1), b, a, ab$, se usan en el mismo sentido.

Con base en los anteriores resultados, se define el efecto del factor A como:

$$A = [A_{i=1} - A_{i=0}]_{mod2} = [A_1 - A_0]_{mod2}$$

Para que esté en base unitaria y considerando que cada tratamiento se estudia en r unidades experimentales se define el efecto del factor A por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2r}[A_{i=1} - A_{i=0}]_{mod2} = \frac{1}{2r}[10 + 11 - 01 - 00]_{mod2} \\ &= \frac{1}{2r}[a + ab - (1) - b] = \frac{1}{2r}(a-1)(b+1) \\ &= \overline{y}_{A^+} - \overline{y}_{A^-} \end{aligned}$$

lo cual quiere decir que el efecto de A puede encontrarse como la diferencia en la respuesta promedio de las dos combinaciones de tratamientos en los niveles altos de A ($\overline{y}_A^+$) y las dos combinaciones de tratamientos en los niveles bajos de A ($\overline{y}_{A^-}$).

De manera similar, se establecen los efectos de B y AB,entonces para el factor B se tiene:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2r}[B_{i=1} - B_{i=0}]_{mod2} = \frac{1}{2r}[01 + 11 - 00 - 10]_{mod2} \\ &= \frac{1}{2r}[a + ab - (1) - a] = \frac{1}{2r}(a+1)(b-1) \\ &= \overline{y}_{B^+} - \overline{y}_{B^-} \end{aligned}$$

mientras que para la interacción el efecto es:

$$\begin{aligned} (AB)_{j+j=1} &= T_{a_0b_1} + T_{a_1b_0} = 01 + 10 \\ (AB)_{i+j=0} &= T_{a_0b_0} + T_{a_1b_1} = 00 + 11 \end{aligned}$$

De este modo, el efecto de la interacción AB se define como la diferencia promedio entre el efecto de A con el nivel alto de B y el efecto de A con el nivel bajo de B. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{2r}[(AB)_{i+j=0} - (AB)_{i+j=1}]_{mod2} = \frac{1}{2r}[00 + 11 - 01 - 10]_{mod2} \\ &= \frac{1}{2r}[(1) + ab - a - b] = \frac{1}{2r}(a-1)(b-1) \end{aligned}$$

Otra manera de estudiar los efectos es haciendo uso de la tabla de contrastes con base en los signos positivos y negativos, como se presenta a continuación:

Efecto	$T_{a_0b_0}$ 00	$T_{a_0b_1}$ 01	$T_{a_1b_0}$ 10	$T_{a_1b_1}$ 11
A	-	-	+	+
B	-	+	-	+
AB	+	-	-	+

Tabla 5.4:

De la tabla anterior se observa que el factorial es un experimento donde de antemano se han planteado contrastes ortogonales, entonces:

$$SS_{Contraste} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i Y_{i..}\right)^2}{r\sum_{i=1}^{t} \lambda_i^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \tau_i\right)^2}{r\sum_{i=1}^{t} \lambda_i^2}$$

con $\tau_i = \overline{y}_{i..} - \overline{y}_{...}$. De esta manera, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
SS_A &= \frac{1}{4r}\left(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \tau_i\right)^2 = \frac{1}{4r}[A_{i=1} - A_{i=0}]^2_{mod2} \\
&= \frac{1}{4r}[Ta_1b_1 + Ta_1b_0 - Ta_0b_1 - Ta_0b_0]^2_{mod2} \\
&= \frac{1}{4r}[11 + 10 - 01 - 00]^2_{mod2} \\
SS_B &= \frac{1}{4r}[B_{j=1} - B_{j=0}]^2_{mod2} \\
SS_{AB} &= \frac{1}{4r}[(AB)_{i+j=0} - (AB)_{i+j=1}]^2_{mod2}
\end{aligned}$$

La suma de cuadrados total se encuentra como de costumbre, es decir,

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{r}(y_{ijk} - \overline{y}_{...})^2$$

En general, la SS_{T0tal} tiene $4r-1$ grados de libertad. La suma de cuadrados del error, con $4(r-1)$ grados de libertad, suele calcularse por sustracción como

$$SS_E = SS_{Total} - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

5.2.2. Diseños 2^3

Cuando se tienen tres factores, A, B, C, con dos niveles cada uno, entonces hay un total de 8 tratamientos en investigación. Al dise no se le llama dise no factorial 2^3, y en este caso la representación geométrica de las ocho combinaciones de tratamientos puede hacerse con un cubo como se muestra en la figura 5.3

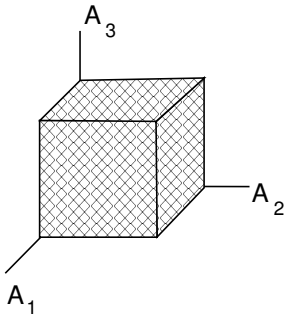

Figura 5.3: Diseño 2^3

Al igual que en el dise no factorial 2^2, existen tres notaciones diferentes para los ocho tratamientos que son de uso general. La primera es la notación + y -, llamada con frecuencia notación geométrica. La segunda es el uso de las letras minúsculas para identificar las combinaciones de los tratamientos. La tercera notación utiliza 1 y 0 para denotar los niveles alto y bajo, respectivamente, de los factores, en lugar de + y -. Estas diferentes notaciones se ilustran en la tabla 5.5.

Tratamiento	A	B	C	Efecto	A	B	C
1	-	-	-	(1)	0	0	0
2	+	-	-	a	1	0	0
3	-	+	-	b	0	1	0
4	+	+	-	ab	1	1	0
5	-	-	+	c	0	0	1
6	+	-	+	ac	1	0	1
7	-	+	+	bc	0	1	1
8	+	+	+	abc	1	1	1

Tabla 5.5: Notación en Diseños 2^3

Hay siete grados de libertad entre los ocho tratamientos del dise no 2^3. Tres grados de libertad se asocian con los efectos principales de A, B, C.

Cuatro grado de libertad se asocian a las interacciones; uno con cada una de las interacciones dobles AB, AC, BC y uno con la interacción triple ABC.

Los efectos principales e interacciones se definen con base en la siguiente suma de totales de tratamientos, la suma de los subíndices es módulo 2.

$$\begin{aligned}
A_{i=0} &= 000 + 001 + 010 + 011 \\
A_{i=1} &= 100 + 101 + 110 + 111 \\
B_{j=0} &= 000 + 001 + 101 + 100 \\
B_{j=1} &= 010 + 011 + 110 + 111 \\
AB_{i+j=0} &= 000 + 110 + 001 + 111 \\
AB_{i+j=1} &= 010 + 100 + 010 + 110 \\
C_{k=0} &= 000 + 100 + 010 + 110 \\
C_{k=1} &= 001 + 101 + 011 + 111 \\
AC_{i+k=0} &= 000 + 010 + 101 + 111 \\
AC_{i+k=1} &= 100 + 110 + 001 + 011 \\
BC_{j+k=0} &= 000 + 100 + 011 + 111 \\
BC_{j+k=1} &= 010 + 110 + 001 + 101 \\
ABC_{i+j+k=0} &= 000 + 110 + 101 + 011 \\
ABC_{i+j+k=1} &= 100 + 010 + 001 + 111
\end{aligned}$$

El efecto promedio del factor A es sólo el promedio de estos cuatro efectos, o

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4r}[A_{i=1} - A_{i=0}] \\
&= \frac{1}{4r}[100 + 101 + 110 + 111 - 000 - 001 - 010 - 011]_{mod2} \\
&= \frac{1}{4r}[a_1b_0c_0 + a_1b_0c_1 + a_1b_1c_0 + a_1b_1c_1 - a_0b_0c_0 - a_0b_0c_1 - a_0b_1c_0 - a_0b_1c_1] \\
&= \frac{1}{4r}[a + ac + ab + abc - (1) - c - b - bc] \\
&= \frac{1}{4r}(a-1)(b+1)(c+1)
\end{aligned}$$

El anterior resultados puede descomponerse como sigue:

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{y}_{a_1b_0c_0} - \overline{y}_{a_0b_0c_0} & : & \text{efecto del factor } A \text{ a los niveles } 0,0 \text{ de b y c} \\
\overline{y}_{a_1b_0c_1} - \overline{y}_{a_0b_0c_1} & : & \text{efecto del factor } A \text{ a los niveles } 0,1 \text{ de b y c} \\
\overline{y}_{a_1b_1c_0} - \overline{y}_{a_0b_1c_0} & : & \text{efecto del factor } A \text{ a los niveles } 1,0 \text{ de b y c} \\
\overline{y}_{a_1b_1c_1} - \overline{y}_{a_0b_1c_1} & : & \text{efecto del factor } A \text{ a los niveles } 1,1 \text{ de b y c}
\end{array}
$$

Al sumar todas las observaciones y dividir entre 4 se tiene el promedio de ese tratamiento, es decir, el promedio de estas cuatro diferencias es el efecto A, el cual esta dado por:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4}\left[\overline{y}_{a_1b_0c_0} - \overline{y}_{a_0b_0c_0} + \overline{y}_{a_1b_0c_1} - \overline{y}_{a_0b_0c_1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[\overline{y}_{a_1b_1c_0} - \overline{y}_{a_0b_1c_0} + \overline{y}_{a_1b_1c_1} - \overline{y}a_0b_1c_1\right] \\
&= \overline{y}_{A^+} - \overline{y}_{A^-}
\end{aligned}
$$

De manera similar, el efecto de B es la diferencia de los promedios entre las cuatro combinaciones de tratamientos, la cual está dada por:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{4r}[B_{j=1} - B_{j=0}] = \overline{y}_{B^+} - \overline{y}_{B^-} \\
&= \frac{1}{4r}[010 + 011 + 110 + 111 - 000 - 001 - 100 - 101]_{mod2} \\
&= \frac{1}{4r}(a+1)(b-1)(c+1)
\end{aligned}
$$

El efecto de C es:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{4r}[C_{k=1} - C_{k=0}] = \overline{y}_{C^+} - \overline{y}_{C^-} \\
&= \frac{1}{4r}[001 + 101 + 011 + 111 - 000 - 100 - 010 - 110]_{mod2} \\
&= \frac{1}{4r}(a+1)(b+1)(c-1)
\end{aligned}
$$

Los efectos de la interacción de dos factores pueden calcularse con cierta facilidad. La interacción AB es la mitad de la diferencia entre los efectos promedio de A con los dos niveles de B. Utilizando los siguientes resultados, se encuentra dicha interacción.

La diferencia entre la anteriores expresiones mide la discrepancia del efecto de A al combinar los niveles de B. A esto se le llama efecto de interacción

B	Efecto promedio de A
Alto(+)	$\frac{1}{2}[(\overline{y}_{a_1b_1c_0} - \overline{y}_{a_0b_1c_0}) + (\overline{y}_{a_1b_1c_1} - \overline{y}_{a_0b_1c_1})]$
Bajo(-)	$\frac{1}{2}[(\overline{y}_{a_1b_0c_0} - \overline{y}a_0b_0c_0) + (\overline{y}_{a_1b_1c_1} - \overline{y}_{a_0b_0c_1})]$

Tabla 5.6: Efectos primarios

AB y se divide entre dos para tener la misma base que los efectos principales. De este modo, se tiene:

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{4r}[(AB)_{i+j=0} - (AB)_{i+j=1}] \\ &= \frac{1}{4r}[ab + abc + (1) + c - b - bc - a - ac] = \frac{1}{4r}(a-1)(b-1)(c+1) \end{aligned}$$

Razonando de manera análoga, las interacciones de AC y BC son:

$$\begin{aligned} AC &= \frac{1}{4r}[(AC)_{i+k=0} - (AC)_{i+k=1}] \\ &= \frac{1}{4r}[(1) + b + ac + abc - a - c - ab - bc] = \frac{1}{4r}(a-1)(b+1)(c-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \frac{1}{4r}[(BC)_{j+k=0} - (BC)_{j+k=1}] \\ &= \frac{1}{4r}[(1) + a + bc + abc - b - c - ab - ac] = \frac{1}{4r}(a+1)(b-1)(c-1) \end{aligned}$$

Mientras que, la interacción triple se expresa como:

$$\begin{aligned} ABC &= \frac{1}{4r}[(ABC)_{i+j+k=0} - (ABC)_{i+j+k=1}] \\ &= \frac{1}{4r}[abc + a + c + b - bc - (1) - ac - ab] \\ &= \frac{1}{4r}(a-1)(b-1)(c-1) \end{aligned}$$

De esta forma, la interacción ABC puede considerarse como la diferencia de dos promedios.

En términos de contrastes, los efectos e interacciones se definen con los coeficientes dados en la tabla 5.7

Los signos de los efectos principales se determinan asociando un signo positivo con el nivel alto y un signo negativo con el nivel bajo. Una vez

	Tratamientos							
Efecto	000	100	010	110	001	101	011	111
Total	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
A	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1
B	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
AB	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
C	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1
AC	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
BC	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
ABC	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1

Tabla 5.7: Coeficientes para calcular los efectos en un dise no 2^3

que se han establecido los signos de los efectos principales, los signos de las filas restantes pueden obtenerse multiplicando las filas precedentes apropiadas, columna por columna. El contraste de cualquier efecto puede obtenerse fácilmente a partir de esta tabla.

Las sumas de cuadrados de los efectos se calculan con facilidad, ya que cada efecto tiene un contraste correspondiente con un solo grado de libertad. En el dise no 2^3 con r réplicas, la suma de cuadrados de cualquier efecto es:

$$SS(Contraste) = \frac{1}{8r}(Contraste)^2$$

De este modo, la varianza de la estimación de cada efecto es:

$$Var(Efecto) = Var\left(\frac{Contraste}{4r}\right) = \frac{\sigma^2}{2r}$$

En el caso de tener varias observaciones para cada combinación de tratamientos, se obtiene la tabla 5.8 de análisis de varianza.

5.3. Adición de puntos centrales

Cuando en un diseño factorial 2^k los k factores admiten un nivel de pruebas intermedio, es recomendable formar un tratamiento adicional formado por la combinación del nivel intermedio o medio de todos los factores. A tal *Tratamiento* o combinación se le conoce como *Punto central.*

Existen dos razones por las cuales es deseable correr el punto central con cierto número de réplicas:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media cuadrática esperada
A	SC_A	1	$\sigma^2 + 2r[A]^2$
B	SC_B	1	$\sigma^2 + 2r[B]^2$
C	SC_C	1	$\sigma^2 + 2r[C]^2$
AB	SC_{AB}	1	$\sigma^2 + 2r[AB]^2$
AC	SC_{AC}	1	$\sigma^2 + 2r[AC]^2$
BC	SC_{BC}	1	$\sigma^2 + 2r[BC]^2$
ABC	SC_{ABC}	1	$\sigma^2 + 2r[ABC]^2$
Error	SC_E	$2^3(r-1)$	σ^2
Total	SC_{Total}	$2^3r - 1$	

Tabla 5.8: ANOVA en diseños 2^3

- La primer razón es obtener grados de libertad adicionales para el error en la tabla del ANOVA, sin perjudicar el balance en la estimación de los efectos de interés.

- La segunda razón, dirigida a factores cuantitativos, es que las repeticiones al centro permiten detectar la posible presencia de curvatura en al menos uno de los factores objeto de estudio. La curvatura a los que se hace referencia, son los efectos cuadráticos. Una vez detectado este tipo de efectos, el experimento se aumenta con más puntos experimentales para poder estudiar dicha curvatura. No es conveniente utilizar de entrada un experimento que permita estudiar la curvatura, ya que de no existir ésta se estarían dilapidando recursos.

5.4. Algoritmo de Yates para el diseño factorial 2^k

El procedimiento de cálculo de los efectos mediante la tabla de signos mostrado anteriormente fue desarrollado por Box-Hunter-Hunter, su aplicabilidad es inmediata para diseños con pocos factores, si el número de factores crece, la aplicabilidad del algoritmo de los signos se hace complicada, en tal caso se recomienda el uso del algoritmo desarrollado por Yates.

A continuación se describe el algoritmo de Yates para diseños 2^k.

1. Colocar la variable respuesta en la primero columna y en el orden estándar de la matriz del diseño

2. Añadir tantas columnas auxiliares como factores existan en el diseño. La primera columna auxiliar se completa de la siguiente manera:

a) Primera mitad de los valores es igual a:

1) primer valor es la suma del primer y segundo valor de la respuesta
2) segundo valor es la suma de las respuesta tercera y cuarta
3) realizar las demás suma en el mismo orden

b) La segunda mitad de los valores se calcula de la siguiente manera:

1) el primer valor es la resta de la segunda respuesta menos la primera
2) el segundo valor es la resta de la cuarta menos la tercera respuesta
3) repetir el proceso en la secuencia anterior

La segunda columna auxiliar se completa igual que la primera columna, usando como respuesta los valores de la primera columna auxiliar. De manera análoga, se construyen las restantes columna auxiliares.

3. Crear una última columna cuyos valores se obtienen de la siguiente manera:

a) El primer valor es el cociente del valor de esta posición en la columna anterior por el número total de condiciones experimentales

b) Los restantes valores se obtienen dividiendo el valor de la posición de interés entre la mitad de las condiciones experimentales

4. En la columna final, el primer valor corresponde al valor de la media de las respuestas observadas en el diseño. Los valores siguientes son los estimadores de los efectos promedios de los factores considerados en el diseño. La correspondencia entre valores y efectos se realiza a través de la localización de los 1 en la fila correspondiente de la matriz del diseño.

En la figura 5.4 se ilustra la posible aplicación del algoritmo de Yates en un diseño 2^3.

Ejemplo 5.1 *Para conocer el nivel de efectividad de un nuevo torno para la fabricación de pernos, el encargado del departamento de producción, selecciona dos tipos de acero disponible, elabora dos tipos de pernos de diamétros 5mm y 7mm, cuyas longitudes son 12 cm y 15 cm, respectivamente, se seleccionan al azar dos muestras de 100 pernos de cada tipo y se cuenta el número de pernos sin defectos. Se denota por L el factor longitud del perno*

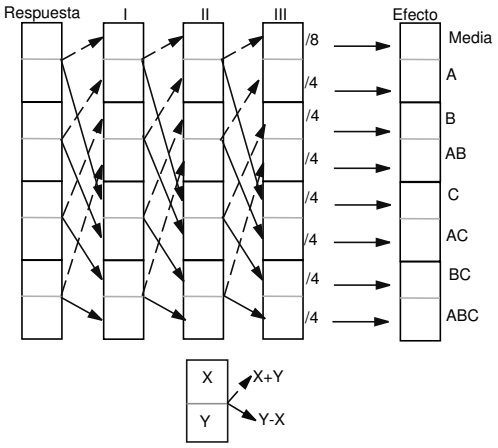

Figura 5.4: Esquema de aplicación del algoritmo de Yates

con dos niveles 12cm(-1) y 15 cm(1), D el factor diamétro con los niveles -1 (5mm) y 1 (7mm) y T el tipo de acero usado a dos niveles -1(A) y 1(B).

Utilizar la información del diseño que se resume en la tabla 5.10, para estimar los efectos de cada factor y realizar los contrastes de hipótesis de interés.

Factores			Replicas		
L	D	T	M1	M2	Media
-1	-1	-1	77	81	79
1	-1	-1	98	96	97
-1	1	-1	76	74	75
1	1	-1	90	94	92
-1	-1	1	63	65	64
1	-1	1	82	86	84
-1	1	1	72	74	73
1	1	1	92	88	90

Tabla 5.9:

Como el diseño formulado es del tipo 2^3 las medias contenida en la tabla 5.9 se pueden representar el cubo de la figura 5.5.

Utilizando el algoritmo de los signos se estiman los efectos principales de cada factor:

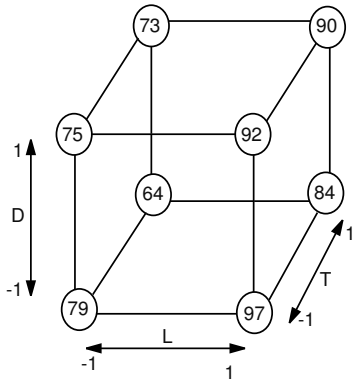

Figura 5.5: Representación gráfica de la respuesta

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{(97+84+90+92)-(79+75+64+73)}{4} = \frac{72}{4} = 18 \\
D &= \frac{(75+92+73+90)-(79+97+64+84)}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \\
T &= \frac{(73+64+90+84)-(79+97+92+75)}{4} = \frac{-32}{4} = -8
\end{aligned}
$$

Es decir, al aumentar la longitud de los pernos de 12 cm a 15 cm, el promedio de pernos no defectuosos se incrementa en 18 unidades, al varíar el diamétro de 5 a 7mm, el promedio de pernos no defectuosos se incrementa en 1.5 unidad, finalmente para el tipo de acero utilizado al usar tipo B en lugar de tipo A, el promedio de unidades defectuosas disminuye en 8 unidades. En conclusión, los efectos principales no aportan información suficiente para describir como los factores influyen en la respuesta, ya que en algunos casos el efecto de un factor depende de los niveles de los otros, en otras palabras, existe efectos asociado a las interacciones.

El efecto de la longitud cuando el diamétro es -1:

$$L(D=-1) = \frac{(73+75)-(64+79)}{2} = 2{,}5$$

El efecto de la longitud cuando el diamétro es 1:

$$L(D=1) = \frac{(92+90)-(84+97)}{2} = 0{,}5$$

Se observa que el efecto de la longitud en el promedio de pernos no defectuosos, es afectado por el diamétro del perno fabricado.

El efecto de la longitud cuando el tipo es -1:

$$L(T=-1)=\frac{(97+92)-(75+79)}{2}=17{,}5$$

El efecto de la longitud cuando el tipo es 1:

$$L(T=1)=\frac{(84+90)-(73+64)}{2}=18{,}5$$

El efecto del diamétro cuando el tipo es -1:

$$D(T=-1)=\frac{(75+92)-(97+79)}{2}=-4{,}5$$

El efecto del diamétro cuando el tipo es 1:

$$D(T=1)=\frac{(73+90)-(84+64)}{2}=7{,}5$$

Se observa que el efecto del diamétro en el promedio de pernos no defectuosos, es afectado por el tipo de acero usado.

Conclusiones análogas se obtienen de la interacción entre diamétro y tipo de acero utilizado en la fabricación del perno.

El efecto de las interacciones dobles se estima como:

$$\begin{aligned} LD &= \frac{(L(D=1))-(L(D=-1))}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \\ LT &= \frac{(L(T=1))-(L(T=-1))}{2}=\frac{1}{2}=0{,}5 \\ DT &= \frac{(D(T=1))-(D(T=-1))}{2}=\frac{12}{2}=6{,}0 \end{aligned}$$

El efecto de la interacción de longitud-diamétro cuando tipo es igual a -1, es:

$$LD(T=-1)=\frac{(79+92)-(97+75)}{2}=-0{,}5$$

El efecto de la interacción de longitud-diamétro cuando tipo es igual a 1, es:

$$LD(T=1)=\frac{(64+90)-(84+73)}{2}=-1{,}5$$

El efecto asociado con la interacción de los tres factores es:

$$LDT=\frac{LD(T=1)-LD(T=-1)}{2}=\frac{-1{,}5+{,}05}{2}=-0{,}5$$

Factores			Respuesta	Columnas auxiliares					
L	D	T	Media	(1)	(2)	(3)	Divisor	Efecto	Término
-1	-1	-1	79	176	343	654	8	81.75	Media
1	-1	-1	97	167	311	72	4	18	L
-1	1	-1	75	148	35	6	4	1.5	D
1	1	-1	92	163	37	-4	4	-1	LG
-1	-1	1	64	18	-9	-32	4	-8	T
1	-1	1	84	17	15	2	4	.05	LT
-1	1	1	73	20	-1	24	4	6	LD
1	1	1	90	17	-3	-2	4	-.05	LDT

Tabla 5.10:

Los efectos calculados mediante el método de los signos, se calculan a continuación usando el algoritmo de Yates:

Las sumas de cuadrados de los términos involucrados en el diseño poseen los valores siguientes:

$$\begin{aligned}
SS_{Total} &= \sum_{ijkl} y^2_{ijkl} - \frac{y^2_{....}}{N} = 1751 \\
SS_L &= \frac{1}{8}\sum_{i} y^2_{i...} - \frac{y^2_{....}}{N} = 1296 \\
SS_D &= \frac{1}{8}\sum_{j} y^2_{.j..} - \frac{y^2_{....}}{N} = 9 \\
SS_T &= \frac{1}{8}\sum_{k} y^2_{..k.} - \frac{y^2_{....}}{N} = 256 \\
SS_{LD} &= \frac{1}{4}\sum_{ij} y^2_{ij..} - \frac{y^2_{....}}{N} - SC_L - SC_D = 4 \\
SS_{LT} &= \frac{1}{8}\sum_{ik} y^2_{i.k.} - \frac{y^2_{....}}{N} - SC_L - SC_T = 1 \\
SS_{DT} &= \frac{1}{8}\sum_{jk} y^2_{.jk.} - \frac{y^2_{....}}{N} - SC_D - SC_T = 144
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SS_{LDT} &= \frac{1}{2}\sum_{ijk} y^2_{ijk.} - \frac{y^2_{....}}{N} - SC_{LD} - SC_{LT} - SC_{DT} = 1 \\
SS_{Error} &= SS_{Total} - SS_{Tratamiento} = 40
\end{aligned}$$

Cuando:

$$SC_{Tratamientos} = SC_L + SC_T + SC_D + SC_{LD} + SC_{LT} + SC_{DT} + SC_{LDT}$$

La tabla de ANOVA asociada al diseño es:

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F
L	1296	1	1296	259.2
D	9	1	9	1.8
T	256	1	256	51.2
LD	4	1	4	0.8
LT	1	1	1	0.2
DT	144	1	144	24.8
LDT	1	1	1	0.2
Error	40	8	5	
Total	1751	15		

Tabla 5.11:

Para un nivel de significancia del 1 %, $F_{1,8,0.01} = 11{,}26$, entonces al nivel de significancia del 1 % se rechaza la hipótesis nula de los contraste asociados a los efectos principales del factor longitud, y tipo, así, como de la interacción de los niveles del factor diamétro y tipo, para los demás efectos principales, interacciones dobles y triples se acepta H_0. Se recomienda realizar las pruebas *Post hoc* necesarias.

5.5. Diseños Factoriales 3^k

Un dise no factorial 3^k es un arreglo de k factores que tienen tres niveles cada uno. Se hará referencia a los tres niveles de los factores como bajo, medio y alto. Existen varias notaciones para representar estos niveles de los factores; una posibilidad es representar los niveles de los factores con los dígitos 0 (bajo), 1 (medio) y 2 (alto). Cada combinación de tratamientos del dise no 3^k se denotará por k dígitos, donde el primer dígito indica el nivel del factor A, el segundo dígito indica el nivel del factor B, y el dígito k-ésimo indica el nivel del factor K.

Por ejemplo en un dise no factorial 3^2, se tiene:

Donde $(0, 0)$ denota la combinación de tratamientos correspondiente a A y B ambos en el nivel bajo, y $(0, 1)$ denota la combinación de tratamientos correspondiente a A en el nivel bajo y B en el nivel intermedio.

Cuando los niveles de un factor, por ejemplo A son tres, el efecto de ese factor estará reflejado en la variabilidad de tres totales de tratamientos,

		B		
		0	1	2
	0	(0,0)	(0,1)	(0,2)
A	1	(1,0)	(1,1)	(1,2)
	2	(2,0)	(2,1)	(2,2)

Tabla 5.12: Tratamientos en diseños 3^2

$(A)0$; $(A)1$ y $(A)2$; donde $(A)i$ representa el total obtenido al sumar todos los tratamientos con nivel i del factor A. También el efecto del factor A se puede estudiar con dos contrastes ortogonales entre esos tres totales. Así, al efecto principal de un factor con tres niveles se le asocian dos grados de libertad.

El dise no más simple del sistema 3^k es el dise no 3^2, el cual tiene dos factores, cada uno con tres niveles obteniendo un total de 9 tratamientos figura 5.6

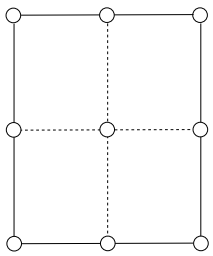

Figura 5.6: Combinaciones de tratamientos en un dise no factorial 3^2

Los nueve tratamientos se pueden escribir de varias maneras, algunas de las cuales se muestran en la tabla 5.13.

El modelo estadístico para el dise no 3^2 se puede escribir considerando el efecto individual de cada factor y de la interacción entre ambos, como se presenta a continuación:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

cuando $i = 1, 2$ $k = 1, 2, \cdots, r$; α_i es el efecto del factor A, β_j representa el efecto del factor B y $(\alpha\beta)_{ij}$ es la interacción entre los dos factores.

En consecuencia, se contrasta la hipótesis: no hay efecto de interacción de los factores A y B sobre la variable respuesta:

$$\begin{aligned} H_0 &: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \\ H_1 &: (\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \end{aligned}$$

Tratamiento		A	B	A	B
Bajo	Bajo	-1	-1	0	0
Medio	Bajo	0	-1	1	0
Alto	Bajo	1	-1	2	0
Bajo	Medio	-1	0	0	1
Medio	Medio	0	0	1	1
Alto	Medio	1	0	2	1
Bajo	Alto	-1	1	0	2
Medio	Alto	0	1	1	2
Alto	Alto	1	1	2	2

Tabla 5.13:

Al igual que en los dise nos 2^k, si esta hipótesis no se rechaza, entonces se contrastan las hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: (\alpha)_i = 0 \\ H_1 &: (\alpha)_i \neq 0 \text{ para algún } i \end{aligned}$$

es decir, no hay efecto significativo del factor A sobre la variable respuesta; y

$$\begin{aligned} H_0 &: (\beta)_j = 0 \\ H_1 &: (\beta)_j \neq 0 \text{ para algún } j \end{aligned}$$

no hay efecto significativo del factor B sobre la variable respuesta.

Estas hipótesis se juzgaran con el ANOVA, para ello las sumas de cuadrados para los tres efectos incluidos en el modelo lineal se calculan mediante los métodos usuales al utilizar diagramas de estructuras.

De acuerdo al modelo lineal, se tienen dos comparaciones independientes para A, dados por las filas:

$$Filas \quad X_1 = 0 \quad X_1 = 1 \quad X_1 = 2$$

El efecto de B tiene dos comparaciones independientes entre columnas:

$$Columnas \quad X_2 = 0 \quad X_2 = 1 \quad X_2 = 2$$

En el sistema de los dise nos 3^k, cuando los factores son cuantitativos, es común denotar los niveles bajo, intermedio y alto con $-1, 0, +1$, respectivamente. Este dise no es una de las alternativas experimentales que permite estudiar efectos de curvatura, además de efectos lineales y de interacción.

Cuando el experimentador se preocupa por la curvatura en función de la res- puesta, es necesario considerar dos puntos:

1. El dise no 3^k no es una forma más eficiente de modelar una relación cuadrática.

2. El dise no 2^k aumentado con los puntos centrales. Permite conservar reducido el tama no y la complejidad del dise no y al mismo tiempo obtener cierta protección contra la curvatura.

5.6. Uso del SPSS

Las estrategias de análisis para diseños 2^k, 3^k y p^k, cuando p es un número primo, mediante el uso del SPSS, son las mismas utilizadas en diseños factoriales considerados en el capítulo 3, salvo que cada factor presenta 2, 3 o p niveles. La secuencia de comandos utilizada en el análisis es:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> Univariado
```

Las cajas de diálogo y los campos asociados a estas fueron descritas en detalles en el capítulo 3.

5.7. Solución de problemas

Problema 5.1 *Un Psicólogo clínico esta interesado en el efecto que posee dos tipos de terapias contra el insomnio en hombres y mujeres, para tal fin seleccionó a un grupo se pacientes de ambos sexos les aplicó de manera aleatoria las terapias en cuestión y registró las horas dormidas por cada paciente durante los tres días del ensayo. La información se resume en la tabla 5.14.*

Terapia			
Terapia A		Terapia B	
Sexo		Sexo	
Hombre	Mujer	Hombre	Mujer
12	14	15	18
13	14	14	15
14	12	14	16
10	12	14	16
15	16	18	18

Tabla 5.14: Datos

1. Describa el tipo de diseño y las variables que lo conforman

2. Escriba la ecuación estructural asociada al diseño

3. Estimar los efectos significativos del modelo al nivel del 2 %

Según la descripción del diseño se está en presencia de un diseño factorial del tipo 2^2, es decir,un diseño con dos factores cada uno a dos niveles, los factores en cuestión son Sexo y Terapia, mientras que la variable respuesta Y_{ijk}, es el total de horas dormidas durante los tres últimos días.

La ecuación estructural que explica las horas dormidas por el paciente en los últimos tres días es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \\ k = 1, , 2, \cdots, 10 \end{array}$$

Para estimar los efectos significativos del modelo anterior, es necesario ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> Univariado
```

En la caja de diálogo principal se seleccionan los campos:

```
Dependiente: Horas
Factores fijos: Sexo, Terapia
 Modelo: Personalizado
    Construir términos: Efectos principales: Sexo, Terapia
                        Interacción: Sexo*Terapia
      Suma de cuadrados Tipi III
      Incluir la intersección
    Continuar
 Opciones:
     Mostrar: medias marginales para cada factor e interacción
             Estadísticos  descriptivos, estimación del efecto
             potencia observada
  Continuar
Aceptar
```

La información reportada por el procedimiento estdístico considerado, se resume en un conjunto de tablas que serán leídas a continuación.

La Tabla 10.6 Pruebas de efectos intersujetos, reporta independencia en el efecto de la interacción entre los factores ya que, el $p-valor$ del estadístico de prueba es mayor a 0.02 ($p-valor = 0{,}602$) luego debe eliminar del modelo la interaccón de los factores.

Origen	Sumas	gl	Medias	F	Sig.
Modelo corregido	41.800	3	13.933	4.932	.013
Intersección	4205.000	1	4205.000	1.488E3	.000
Terapia	33.800	1	33.800	11.965	.003
Sexo	7.200	1	7.200	2.549	.130
Terapia* Sexo	.800	1	.800	.283	.602
Error	45.200	16	2.825		
Total	4292.000	20			
Total corregido	87.000	19			

Tabla 5.15: Pruebas de efectos intersujetos

Es de observar que la suma de cuadrados del modelo corregido es la suma de los valores de este renglón asociados a la terapia, al sexo y a la intersección de los factores, corresponde a la suma de cuadrados intergrupos, mientras que la suma de cuadrados del error corresponde a la suma de cuadrados intragrupos.

Al correr el modelo Personalizado considerando sólo los efectos principales de los dos factores se tiene:

Origen	Suma	gl	Medias	F	Sig.
Modelo corregido	41.000	2	20.500	7.576	.004
Intersección	4205.000	1	4205.000	1554.022	.000
Terapia	33.800	1	33.800	12.491	.003
Sexo	7.200	1	7.200	2.661	.121
Error	46.000	17	2.706		
Total	4292.000	20			
Total corregida	87.000	19			

Tabla 5.16: Pruebas de efectos intersujetos modificado

El $p-valor$ del factor Sexo es mayor que 0.02, lo contrario para el factor Terapia, es decir, el efecto de la terapia es significativo para el modelo considerado. Se puede observar que la suma de cuadrados de la interacción de los factores se acumuló en la suma de cuadrados asociada a la terapia, ahora la suma de la suma de cuadrados de la terapia y el sexo representa la suma de cuadrados del modelo corregido o intergrupos.

En conclusión: se acepta la hipótesis nula del contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2 \\ H_1 &: \text{al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

mientras que se rechaza la hipótesis nula del contraste

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_j = 0 \quad j = 1, 2 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Para establecer cual de las dos terapias es más eficiente en el control del insomnio, es necesario realizar un contraste de hipótesis para dos muestras independientes mediante una prueba t, ya que los factores sólo poseen dos factores.

La secuencia de comandos ejecutada en este caso es:

```
Analizar --> comparar medias --> Prueba t para
                                 muestras independientes
```

Los compos de intrés en este caso son:

```
Variable dependiente: Horas
Variable de agrupación: Terapias
  Definir Grupos:
      Grupo 1: 1
      Grupo 2: 2
     Continuar
  Opciones: Intervalo de confianza al 98%
    Continuar
Aceptar
```

La primera tabla reportada por la prueba de medias, muestra un promedio de las horas dormidas durante el ensayo superior para los pacientes sometidos a la terapia B

Terapia	Media	Desviación típica	N
A	13.20	1.751	10
B	15.80	1.687	10

Tabla 5.17: Estadísticos descriptivos

Para establecer si las diferencias antes observadas son o no estadísticamente significativas, es necesario revisar el reporte de la prueba de Levene a cerca de la igualdad de varianzas en los dos grupos:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 &: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{aligned}$$

								IC al 98 %	
	Levene		Prueba t					Límite	Límite
	F	Sig.	t	$G.L$	Sig.	Dif.	Error.	inferior	superior
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	.00	1.00	-3.382	18	.003	-2.6	.769	-4.215	-.985
$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$			-3.382	18	.003	-2.6	.769	-4.215	-.985

Tabla 5.18: Prueba t para dos muestras independientes

El $p - valor$ del contraste es igual a 1.00 es decir, las varianzas de los dos grupos son iguales.

Como de antemano, se sabe que los promedios son diferentes, se realiza el contraste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_A > \mu_B \\ H_1 &: \mu_A < \mu_B \end{aligned}$$

Este contraste no es reportado por el SPSS, pero usando el $p - valor$ de la prueba de dos colas (0.003), el $p - valor$ para la prueba de una cola es $\frac{0{,}003}{2} = 0{,}0015$, el cual es menor al nivel $\alpha = 0{,}02$ por tanto se acepta la hipótesis alterna, es decir la terapia B es más eficiente para el control del insomnio, al nivel de significancia del 2 %.

Problema 5.2 *Se desea investigar de que manera afecta el tiempo de curado y el tipo de acelerante a la resistencia del caucho vulcanizado. Se realiza un experimento y se obtienen los siguientes resultados:*

	Acelerante		
Tiempo de curado	A	B	C
1	3200	3600	3200
	3000	3600	3100
2	3200	4200	3300
	3010	4100	3600
3	3000	4200	3900
	3200	4300	3800

Tabla 5.19: Resistencia

1. *Escriba el modelo matemático que se adapta al diseño de interés.*
2. *Formular todas las hipótesis que se pueden realizar.*
3. *Efectuar el análisis estadístico aplicable a los contrastes formulados en el ítem anterior.*

4. En caso de existir, señale la combinación entre tiempo de cura y acelerante que aumenta la resistencia.

Según la descripción del diseño se está en presencia de un diseño factorial del tipo 2^3, es decir, un diseño con dos factores cada uno con tres niveles, los factores en cuestión son tiempo de curado y acelerante, mientras que la variable respuesta Y_{ijk}, es resistencia del caucho vulcanizado.

La ecuación estructural que explica la resistencia del cacho vulcanizado, en términos del tipo de acelerante y del tiempo de curados es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i, j = 1, 2, 3 \; k = 1, , 2, \cdots , 18$$

Para estimar los efectos significativos del modelo anterior, es necesario ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> Univariado
```

En la caja de diálogo principal se seleccionan los campos:

```
Dependiente: Resistencia
Factores fijos: tiempo, acelerante
 Modelo: Personalizado
    Construir términos: Efectos principales: Tiempo, Acelerante
                        Interacción: Tiempo*Acelerante
      Suma de cuadrados Tipi III
      Incluir la intersección
    Continuar
 Opciones:
     Mostrar: medias marginales para cada factor e interacción
              Comparar efectos principales
              Ajustes de intervalos de confianza: Bonferroni
             Estadísticos  descriptivos
  Continuar
Aceptar
```

La información reportada por el procedimiento estadístico considerado, se resume en un conjunto de tablas que serán leídas a continuación.

La tabla 5.20 reporta las pruebas intersujetos asociadas al diseño de interés. El primer contraste a considerar es el asociado a la interacción entre los dos factores, es decir, la interacción del tiempo y el acelerante. El contraste se define como:

$$\begin{aligned} H_0 &: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \;\; \forall i, j \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Fuente	Sumas	Gl.	Medias	F	Sig
Modelo corregido	3.423E6	8	427825.000	31.292	.000
Intercción	2.241E8	1	2.241E8	16389.761	.000
Tiempo	2439233.333	2	1219616.667	89.204	.000
Acelerante	621900.000	2	310950.000	22.743	.000
Tiempo*					
Acelerante	7361466.667	4	90366.667	6.610	.009
Error	123050.000	9	13672.222		
Total	2.276E8	18			
Total corregido	3545650.000	17			

Tabla 5.20: Pruebas efectos inter-sujetos

Como el $p - valor$ del contraste es igual a 0.009, entonces al nivel de significancia del 3 % se rechaza la hipótesis nula, es decir, existe un efecto estadísticamente significativo asociado a la interacción de los factores sobre la resistencia del caucho vulcanizado.

Para conocer cual es la combinación de tratamientos mas efectivos entre los niveles de los factores tiempo y acelerante es necesario realizar la lectura de la información resumida en la tabla 5.21.

Tiempo	Acelerante	Media	Desviación	N
1	1	3100.00	141.421	2
	2	3105.00	134.350	2
	3	3100.00	141.421	2
	Total	3101.67	107.781	6
2	1	3600.00	.000	2
	2	4150.00	70.711	2
	3	4250.00	70.711	2
	Total	4000.00	316.228	6
3	1	3150.00	70.711	2
	2	3450.00	212.132	2
	3	3850.00	70.711	2
	Total	3483.33	331.160	6
4	1	3283.33	256.255	6
	2	3568.33	490.323	6
	3	3733.33	527.889	6
	Total	3528.33	456.692	18

Tabla 5.21: Estadísticos descriptivos

Los estadísticos descriptivos reportados en la tabla 5.21, permite concluir que el segundo tiempo de curado combinado con los tipos de acelerantes presentan los mejores promedios en la variable dependiente, en particular la combinación del segundo tiempo de curado con el tercer acelerante reporta la resistencia promedio superior. Mientras que la combinación del primer tiempo de curado con el primer acelerante es la de menor promedio en la respuesta.

			IC 95 %	
Tiempo	Media	error típ.	inferior	superior
1	3101.667	47.736	2993.681	3209.652
2	4000.000	47.736	3892.014	4107.986
3	3483.333	47.736	3375.348	3591.319

Tabla 5.22: Medias marginales: Tiempos

La tabla 5.22 reporta las medias marginales al considerar el factor tiempo, se pueden observar, aparentemente, posibles diferencias significativas entre los promedios en los tres niveles. Para dilucidar sobre la existencia o no de efectos significativos asociados a los niveles del factor tiempo se realizará el contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \forall i \\ H_1 &: \text{al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

El $p-valor$ asociado al factor tiempo se reporta en la tabla 5.20, con valor igual a 0.000, inferior al nivel de significancia 3 %, por tanto existen diferencias en los efectos asociados a cada uno de los tres tiempos de vulcanizado. pero ¿entre cuáles niveles se presentan?

La decisión entre cuales niveles del factor tiempo se presentan las diferencias, es reportado en la tabla 5.23.

					IC 95 %	
Tiempo I	Tiempo J	Diferencia	Error típ	Sig.	inferior	superior
1	2	-898.333*	67.509	.000	-1051.05	-745.62
	3	-381.667*	67.509	.000	-534.38	-228.95
2	1	898.333*	67.509	.000	745.62	1051.05
	3	516.667*	67.509	.000	363.95	669.38
3	1	381.667*	67.509	.000	228.95	534.38
	2	-516.667*	67.509	.000	-669.38	-363.95

Tabla 5.23: Comparaciones por pares

La tabla 5.23 **Comparaciones por pares: Tiempo**, permite observa la existencia de diferencias estadísticamente significativas al 3 % entre todas las posibles combinaciones de pares de tiempos.

El último contraste que puede ser formulado en este diseño, está asociado al efecto de los niveles del acelerante sobre la resistencia del caucho vulcanizado:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_j = 0 \ \forall j \\ H_1 &: \text{al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

El $p-valor$ asociado al factor acelerante en la tabla 5.20 es igual a 0.000 lo cual indica diferencias estadísticamente significativas al nivel del 5 % en la resistencia del caucho vulcanizado asociada a los niveles del acelerante.

			IC 95 %	
Acelerante	Media	error típ.	inferior	superior
1	3283.333	47.736	3175.35	3391.32
2	3568.333	47.736	3460.35	3676.32
3	3733.333	47.736	3625.35	3841.32

Tabla 5.24: Medias marginales: Acelerantes

La tabla 5.24 reporta la resistencia media del caucho vulcanizado en los tres grupos establecidos por los niveles del factor acelerante. Aparentemente el nivel tres del acelerante es el de mejor desempeño.

La tabla 5.25 reporta el resultado de la prueba *post hoc* realizada para determinar entre que niveles existen diferencias estadísticamente significativas al 5 %.

					IC 95 %	
Acele I	Acele J	Diferencia	Error típ	Sig.	inferior	superior
1	2	-285.000*	67.509	.002	-437.715	-132.285
	3	-450.000*	67.509	.000	-602.715	-297.285
2	1	285.000*	67.509	.002	132.285	437.715
	3	-165.000*	67.509	.037	-317.715	-12.285
3	1	450.000*	67.509	.000	297.285	602.715
	2	165.000*	67.509	.037	12.285	317.715

Tabla 5.25: Comparaciones por pares

Como el $p-valor$ asociado a cada uno de las posibles combinaciones por pares, es menor que 0,05 se aceptan los diferencias entre los tres niveles, pero

si se ubica el nivel de significancia por debajo del 3 %, el nivel 2 y el nivel 3 no presentan diferencias significativas.

Como las diferencias entre los pares de medias en el grupo definido por el nivel del factor acelerante, se puede concluir que el acelerante 3 es el más eficiente en la vulcanización de los caucho, por el contrario, el nivel 1 es el menos eficiente, ya que las diferencias de medias en este nivel son todas negativas.

La información contenida en la tabla 5.26 permite corroborar la conclusión acerca de la mejor combinación de los niveles de los factores tiempo y acelerante en la vulcanización del caucho. Nuevamente la combinación reportada como óptima es la del nivel 2 del tiempo con el nivel 3 del acelerante.

				IC 95 %	
Tiempo	Acelerante	Media	error típ.	inferior	superior
1	1	3100.000	82.681	2912.963	3287.037
	2	3105.000	82.681	2917.963	3292.037
	3	3100.000	82.681	2912.963	3287.037
2	1	3600.000	82.681	3412.963	3787.037
	2	4150.000	82.681	3962.963	4337.037
	3	4250.000	82.681	4062.963	4437.037
3	1	3150.000	82.681	2962.963	3337.037
	2	3450.000	82.681	3262.963	3637.037
	3	3850.000	82.681	3662.963	4037.037

Tabla 5.26: Medias marginales: Tiempo*Acelerantes

Capítulo 6

Diseños Factoriales fraccionarios 2^{k-p}

6.1. Preliminares

En la medida en que aumenta las dimensiones de variación de un experimento aumentan, también la cantidad de grupos de tratamientos necesarios para llevarlo a cabo. Así, puede ocurrir que el tamaño del experimento exceda las posibilidades de realizarlo empleando un diseño factorial completo. Los *diseños factoriales fraccionarios* proporcionan una solución a dicho problema. Los *diseños factoriales fraccionarios*, conocidas también como *Diseños de replicación fraccionaria*, son estructuras de investigación en las que sólo se utiliza una parte de la totalidad de las combinaciones de tratamientos en cada una de las réplicas del experimento. El principio de confusión dio origen a los *Diseños Factoriales Fraccionarios*, propuestos por Finney (1945), consideran el uso de algunos bloques de una repetición dentro de algún patrón de confusión.

Igualmente, Finney (1963) afirma que, mientras la técnica de confusión se caracteriza por la reducción del tamaño del bloque, la replicación fraccionaria extiende dicho principio a todo el experimento. En este sentido, el diseño factorial fraccionario consigue reducir la cantidad de grupos experimentales, pero, en contrapartida, algunas interacciones no pueden ser estimadas y, además, se produce una confusión entre determinados efectos factoriales.

Los diseños factoriales 2^n son de gran útilidad para realizar estudios preliminares con múltiples factores para identificar la más importantes y sus interacciones.

Sin embargo, el número de unidades experimentales aumenta geométricamente con el número de factores en el estudio, estas son algunas de las razones que llevaron a Finney a considerar los diseños factoriales fraccionarios en sus inicios. Sin embargo, el mérito de la sistematización y de generalizar la utilización de la técnica de replicación fraccional a diseños más complejos del tipo p^k, siendo p cualquier número primo y k la cantidad de factores, corresponde a Kempthorne.

Los diseños factoriales fraccionarios usan sólo una mitad, la cuarta parte o incluso una fracción menor de las 2^n combinaciones de tratamientos y se usan por una o varias de las razones siguientes:

- El número de tratamientos necesarios excede a los recursos.
- Sólo se requiere información sobre los efectos principales y las interacciones de bajo orden.
- Se necesitan estudios exploratorio para muchos factores.
- Se hace el supuesto de que sólo unos cuantos efectos son importantes.
- Considerar *a priori* interacciones negligible.
- En experimentos secuenciales, se van desagregando tratamientos dependiendo de los resultados de ensayos anteriores.

En la tabla **??**, se muestra el número potencial de los efectos potencialmente de mayor interés para diseños factoriales 2^k, de ahí, se observa que el primer diseño factorial completo que genera un importante exceso de información es el diseño completo 2^5; ya que este diseño permite estimar 31 efectos, de los cuales 15 son potencialmente importantes: los cinco efectos principales, las diez interacciones dobles, y los dieciséis restantes efectos, conformados por las interacciones de tres o más factores, prácticaments se pueden ignorar *a priori*.

En la tabla 6.1 se observa también que para menos de cinco factores los efectos potencialmente importantes superan en número a los efectos ignorables *a priori*, de aquí, que si se fraccionan estos diseños, se pierde por tal motivo información que puede ser relevante. Mientras que, cuando $k \geq 5$ el número de efectos ignorables supera al número de efectos no ignorables o potencialmente importantes, lo cual indica que este tipo de diseños se pueden fraccionar muchas veces sin perder información valiosa. Así, cuando k presente valores grandes, el diseño admite un grado de fraccionamiento mayor.

Al correr sólo una fracción del diseño factorial completo ocurren dos hechos insoslayables:

Diseño 2^k	Total de efectos	Efectos no ignorables	Efectos ignorables
2^2	3	3	0
2^3	7	6	1
2^4	15	10	5
2^5	31	15	16
2^6	63	21	42
2^7	127	28	99

Tabla 6.1: Efectos de los factoriales 2^k

1. Se pierde información, ya que habrán efectos que no podrán estimarse y se tiene menos grados de libertad disponibles para el error. Los efectos que se pierden se espera que sean, en la medida de lo posible, interacciones de alto orden, las cuales se pueden ignorar con bajo riesgo.

2. Los efectos que sí, se pueden estimar tiene al menos un *alias. Se entiende por efecto alias a dos o más efectos con nombres distintos que comparten el mismo contraste y por lo tanto estiman el mismo efecto.* El que un efecto sea alias de otro significa que son realmente el mismo efecto con nombres distintos, y al estimar uno de ellos se estima al mismo tiempo el otro. De manera que no se pueden separar. Cuando el experimentador elige una fracción en la que dos efectos potencialmente son alias, debe contar de antemano con una estrategia de interpretación del efecto estimado.

6.2. La estructura de confusión en diseños 2^{k-p}

Las fracciones de diseños factoriales a dos niveles son una herramienta fundamental en la experimentación industrial. Estos diseños son económicos, estadísticamente eficientes y fáciles de analizar e interpretar. Sin embargo, presentan el inconveniente de la «confusión»: cada contraste corresponde a una combinación lineal de parámetros del modelo completo. Esta combinación de efectos queda definida por la ecuación generatriz de la fracción (Box, Hunter y Hunter, 1988). La elección de una fracción dependerá del conocimiento inicial respecto a qué parámetros son nulos o tienen un valor despreciable frente al resto. La hipótesis habitual, avalada por la práctica, es que estos parámetros corresponden a las interacciones de orden superior. En estas condiciones, las fracciones óptimas son las de máxima «resolución», es decir, aquellas cuyos efectos principales están confundidos con interacciones

de orden mayor. La resolución de una fracción se determina de manera inmediata a partir de la ecuación generatriz completa. En Box, Hunter y Hunter (1988) y Peña (1990) se encuentra una amplia descripción de este tipo de diseños.

6.2.1. Columnas básicas y generadores

La forma tradicional de construir una fracción 2^{k-p} de un diseño factorial con k factores a dos niveles, es asociar p factores a interacciones del diseño completo formada con los $s = k - p$ factores restantes. A estas p combinaciones se les denomina generadores de la fracción.

Por ejemplo, para determinar la matriz del diseño de una fracción 2^{5-2}, se toma el diseño 2^3 formado con 1os factores A, B, C y se incluyen los dos factores adicionales D y E asociándolos a interacciones de los primeros. En la tabla 6.2 se muestra el ejemplo en el que D= AB y E= ABC son los generadores; otras formas de escribirlo son I= ABD, I=ABCE, o I= ABD= ABCE, que se denomina ecuación generatriz o relación de definición, donde I es la columna formada por signos positivos.

A	B	C	D	E
-	-	-	+	+
+	-	-	-	+
-	+	-	-	+
+	+	-	+	-
-	-	+	+	+
+	-	+	-	-
-	+	+	-	-
+	+	+	+	+

Tabla 6.2: Fracción 2^{5-2} D=AB

La ecuación generatriz queda, pues, determinada encontrando p interacciones independientes que estén confundidas con I. En este contexto el término independientes tiene el sentido de que ninguna de las p interacciones se puede obtener como algún producto de las restantes. Mediante el método que se describe en el capítulo VI, se encantará el conjunto de las p interacciones independientes confundidas con la I. La ecuación generatriz completa contiene, además de los p generadores, los productos de todas las combinaciones posibles de los generadores; volviendo al ejemplo de la tabla 6.2, la ecuación generatriz completa sería:

$$A = BD = BCE = ACDE$$

EL número de letras de la interacción de orden menor de la ecuación generatriz completa es igual a la resolución. En el ejemplo, la resolución es III. La ecuación generatriz es una herramienta imprescindible en la selección de la fracción y en el análisis e interpretación de los resultados de la estimación en la experimentación secuencial, pues indica qué diseño es recomendable hacer en cada paso.

A continuación se describe un procedimiento sistemático y sencillo para resolver el problema de búsqueda de la ecuación generatriz a partir de la matriz de diseño, cuando ésta se encuentra en orden estándar, que es el orden habitual. Posteriormente se describirá el método para una ordenación diferente.

La matriz de diseño de una fracción 2^{k-p} se encuentra en orden estándar si contiene las siguientes $s = k - p$ columnas: C_1, formada por signos - y + alternativamente; C_2, alterna dos signos - y dos +; y, en general, C_r, alterna 2^{r-1} signos - y 2^{r-1} signos +. La submatriz formada por estas columnas tiene como filas todas las combinaciones posibles de los dos niveles de los S factores, esto es, las 2^s condiciones experimentales distintas del diseño factorial. Por ejemplo, la matriz de la tabla 6.2, se encuentra en orden estándar: C_1, C_2 y C_3 son las columnas A, B y C, respectivamente. Estas columnas se denominan básicas y cumplen las propiedades siguientes:

1. cualquier otra columna de la matriz se obtiene como producto de una combinación de ellas, y

2. ninguna C_r, $r = 1, \cdots, s$, se puede obtener como producto de un subconjunto de las restantes columnas básicas. En este sentido se dice que son independientes

6.2.2. Método

Para encontrar la ecuación generatriz de la fracción 2^{k-p}, es suficiente con obtener p columnas no básicas como producto de las $s = k - p$ columnas básicas, $C_1, C_2, \cdots, C_s$. A continuación se proporciona una regla simple, dada cualquier columna U, identificar la combinación de las columnas básicas a partir de las cuales se obtiene. Si se toma como referencia el signo correspondiente al primer elemento de una columna, el primer cambio de signo en C_1 se produce en la fila 2, para C_2 en la fila 3, para C_r, en la fila $2^{r-1} + 1$. Si C_r es uno de los factores que dan lugar a la columna U, entonces la fila $j = 2^{r-1} + 1$ de U tiene signo contrario al de la primera, pues C_r, es la única columna básica en la que el signo de la fila $2^{r-1}+1$ es contrario al que aparece en dicha columna en la primera fila. Tomando el primer signo de U como referencia, basta con comprobar los signos en las filas $1, 2, 3, \cdots, 2^{S-1} + 1$.

Por ejemplo, para la fracción 2^{5-2} de la tabla 6.2, los factores que dan lugar a la columna E se obtienen a partir de los signos de las filas 1, 2, 3 y 5, que en este caso en particular serán - +++, respectivamente. Se observa que hay cambio de signo en las filas 2, 3 y 5 respecto a la 1, lo que es característico de la estructura de signos de C_1, C_2, C_3. Se deduce, por tanto, que $E = C_1C_2C_3$, o, lo que es equivalente, E está confundido con ABC. De forma análoga se procedería al estudio de la columna D cuyos signos en las filas 1, 2, 3 y 5 son +–+. Existe cambio de signo en las filas 2 y 3 respecto a la de referencia, lo que es característico de C_1 y C_2 , por lo tanto $D = C_1C_2 = AB$.

De forma esquemática, el procedimiento para obtener la ecuación generatriz de una fracción 2^{k-p} a partir de la matriz de diseño, cuando ésta se encuentra en orden estándar, es el siguiente:

1. Identificar las columnas básicas $C_1, C_2, \cdots, C_S$, donde $s = k - p$.

2. Tomar p columnas independientes, no básicas de la matriz (en algunos diseños, la matriz del diseño, además de las k columnas correspondientes a los factores, incluye columnas que se utilizarán para calcular interacciones, aunque éstas no son propiamente columnas de la matriz del diseño; debido a esto se incluye de forma explícita la condición de independencia).

   Para cada columna no básica elegida, tomar los signos de las filas $2, 3, \cdots, 2^{S-1}+1$ (denominaremos estas filas $F_1, F_2, \cdots, F_s$, para mostrar la relación entre estas filas y las $C_1, C_2, \cdots, C_s$ columnas básicas) y compararlos con el signo de la fila 1. La columna C_r es un factor de la columna no-básica si se ha producido un cambio de signo en la fila F_r . El producto de los factores identificados puede dar lugar a la columna no básica o a su simétrica (todos los signos cambiados). En este caso, multiplicar por -1.

6.3. Concepto de resolución

Al correr un diseño factorial fraccionado los efectos no pueden estimarse de manera aislada, sino que se estiman las sumas o restas de efectos alias. La iterpretación de los alias que se suman se hace fácilmente si puede suponerse que todos los sumandos, excepto uno, no son importantes. Así, el efecto total se puede atribuir a este único efecto que se considera relevante, La estrategia entonces es elegir siempre que sea posible diseños fraccionados en los cuales los efectos potencialmente importantes S sean alias de efectos de antemano irrelevante.

Bajo el supuesto de que los efectos principales son más importantes que las interacciones de dos factores y éstas a su vez son más relevantes que las de tres factores, y así, sucesivamente, es conveniente utilizar diseños factoriales que tengan alta resolución. Un diseño factorial fraccionario es de resolución R si los efectos de la interacción de P factores no son alias de efectos de interacciones que tengan menos de **R-P** factores. A mayor resolución se observa más claramente lo que sucede con los efectos potencialmente importantes. Para fines prácticos basta entender las definiciones particulares de resoluciones III, IV y V.

Diseño resolución III: permite estudiar los efectos principales, bajo el supuesto que todas o algunas interacciones son inexistentes. Nigún efecto principal es alias de otro efecto principal, pero los efectos principales son alias de interacciones de 2 factores o mayores y las interacciones dobles son alias de otras semejantes o mayores.

Diseño resolución IV: ningún efecto principal tiene como alias otro efecto principal o interacción de dos factores. Las interacciones de dos factores forman alias entre sí.

Diseño resolución V: ningún efecto principal o interacción de dos factores tiene alias otro efecto principal o interacción de dos factores, pero las interacciones de tres factores o más están en grupos de alias.

La resolución está asociada por la *palabra o efecto* de la relación definidora con el menor número de letras.

6.4. Diseños Fraccionarios 2^{k-p}

En diseños fraccionados, el objeto de estudio de esta sección, son los diferentes diseños fraccionados que pueden considerarse a partir del diseño factorial completo 2^k; las fracciones consideradas son de la forma $\frac{1}{2^p}$ para $p \geq 1$. Si $p = 1$ sólo se considera la mitad del total de experimentos requeridos para la realización del experimento completo, es de hacer notar que este tipo de diseños representa la familia de diseños menos fraccionados, también podría considerarse los diseños fraccionados máximos, o saturados.

Pero el interés del experimentador puede centrarse en diseños de fraccionamiento intermedio. Cada una de estas familias de diseños fraccionados serán estudiados a continuación.

6.4.1. Media Fracción

La notación 2^{k-1} se emplea para representar una fracción a la mitad de un diseños factorial completo 2^k. Aun cuando, los diseños de una fracción a la mitad, pueden correrse para cualquier valor de $k \geq 2$, no tiene sentido fraccionar el diseño factorial 2^2 porque prácticamente desaparece; al tener sólo cuatro tratamientos, fraccionarlo a la mitad implica correr sólo dos tratamientos y con ellos no es posible estimar ni siquiera los dos efectos principales.

De manera general, se puede construir en dos pasos diseños fraccionados 2^{k-1} con la más alta resolución posible:

1. Se lista el diseño completo para $k-1$ factores y de esta forma se tienen las primeras $k-1$ columnas de la fracción deseada

2. La columna faltante, k-ésima, se construye multiplicando entre sí, las columnas previas. Si se desea la fracción complementaria se cambian los signos de esta última columna. El diseño que resulta es un diseño factorial fraccionado 2^{k-1} con resolución $R = k$.

Si se aplican las normas básicas, resulta sencillo construir medias fracciones, el procedimiento consiste en escribir el diseño completo para el número de variables deseadas y asignar a la variable restante la interacción mayor disponible. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 6.1 (Diseño 2^{3-1}) *Construir la fracción mitad del diseño factorial* 2^3

El primer diseño que puede ser fraccionado, aunque no se recomienda hacerlo, es el factorial completo 2^3, que consta de siete efectos A,B,C,AB,AC,BC,ABC a estimar. Si se quiere fraccionar a la mitad este diseño es necesario seleccionar cuatro entre los ocho tratamientos posibles, es decir, se deben seleccionar ocho tratamientos de los

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 70$$

combinaciones posibles, en pocas palabras se debe seleccionar una fracción mitad entre 70 posibilidades. Pero realmente existen sólo dos más adecuadas. De acuerdo a su jerarquía, el efecto menos importante *a priori* es la interacción triple ABC, así, que este es el efecto más sacrificable para generar la fracción mitad de manera que se pierda un mínimo de información.

La fracción mitad se construye a partir de 2 variables (2^2 es la fracción deseada), es decir, se puede partir de los factores A y B, el tercer factor C se obtiene como producto de los factores anteriores, C=AB es el generador del diseño, la relación de definición es I=ABC, así, el diseño es de resolución $k = 3$. El patrón de confusión es: $A + BC$, $B + AC$, $C + AB$, $Media + ABC$.

La fracción seleccionada se presenta en la tabla 6.3.

Fracción

A	B	C	efecto
1	-1	-1	a
-1	1	-1	b
-1	-1	1	c
1	1	1	abc

Tabla 6.3: Fracción principal el diseño 2^{3-1}

Cuando no hay interacciones de dos o tres factores en el factorial 2^3, los efectos principales para A,B,C se pueden estimar a partir de media réplica del diseño definida por I=ABC, o bien por I=-ABC. Así, en ausencia de interacciones existe redundancia en el diseño completo de manera que los efectos principales se pueden estimar con dos contrastes diferentes, cada uno a partir de una mitad distinta del diseño. La fracción media derivada de I=ABC suele recibir el nombre de *Fracción principal*, mientras que la fracción media derivada de I=-ABC es la *Fracción complementaria*.

Las dos fracciones medias forman un diseño 2^3 completo si cada una se corre por separado, el diseño obtenido es un diseño en bloque incompleto con dos bloques cada uno; la interacción ABC se confunde con los bloques, pero se puede estimar todos los efectos principales y de segundo orden.

En la figura 6.1 se ilustra la fracción del diseño considerada, mediante los puntos color gris, es de hacer notar que la fracción en cuestión cubre casi en su totalidad el cubo, representación del diseño completo. Los puntos blancos corresponden a la fracción complementaria.

Las dos posibles fracciones mitad del diseño 2^{3-1} se resumen en la tabla 6.4.

6.4.2. Diseños saturados

Las medias fracciones son los diseños menos fraccionados. Veamos ahora el extremo opuesto, los diseños lo más fraccionados posible, se denominan saturados, ya que se obtienen mediante la saturación de un completo 2^k asignando a cada interacción una nueva variable, lo cual permite estudiar 2^{k-1} variables. Son, por tanto, diseños de resolución III.

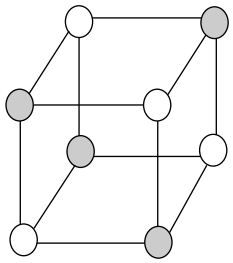

Figura 6.1: Representación geométrica de los diseños 2^{3-1}

Fracción 1				Fracción 2			
A	B	C	efecto	A	B	C	efecto
1	-1	-1	a	-1	-1	-1	(1)
-1	1	-1	b	1	1	-1	ab
-1	-1	1	c	1	-1	1	ac
1	1	1	abc	-1	1	1	bc

Tabla 6.4: Fracciones el diseño 2^{3-1} completo

Un diseño fraccionario se denomina *Saturado* si el número total de grados de libertad del experimento es igual al número de factores que se estudian. Esto es, todos los grados de libertad disponible se gastan en los efectos principales. De lo antes expuesto los diseños saturados poseen resolución III, ya que los efectos principales se confunden con las interacciones dobles.

Estos diseños también se llaman diseños de efectos principales, y resultan especialmente útiles en los estadios iniciales de una investigación, cuando lo que se desea es identificar las variables activas (screening), para posteriormente, y utilizando la estrategia secuencial, estimar sus efectos y averiguar la posible existencia de interacciones entre ellas.

Un ejemplo de diseño factorial saturado lo constituye la fracción 2^{7-4} que se muestra en la tabla 6.5.

Con este diseño sólo se pueden estudiar los efectos principales, suponiendo *a priori*, que las interacciones dobles no son importantes. Nótese que, tras escribir un 2^3 completo, se asignó una nueva variable a cada una de las interacciones disponibles. Por tanto, este diseño tiene cuatro generadores que son:

$$D = AB, \quad E = AC, \quad F = BC, \quad G = ABC$$

Con lo que la relación de definición es:

			AB	AC	BC	ABC
A	B	C	D	E	F	G
-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1
-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	1	1	1	1

Tabla 6.5: Fracción saturada 2^{7-4}

$$
\begin{array}{rl}
 & \mathrm{I} = \mathrm{ABD} = \mathrm{ACE} = \mathrm{BC} = \mathrm{ABCG} \\
\text{(productos de dos)} & = \mathrm{BIDÉ} = \mathrm{ACED} = \mathrm{CD} = \mathrm{ABEL} = \mathrm{BEG} = \mathrm{AFG} \\
\text{(productos de tres)} & = \mathrm{DEF} = \mathrm{ADEN} = \mathrm{BLDG} = \mathrm{CEFG} \\
\text{(productos de cuatro)} & = \mathrm{ABCDEFG}
\end{array}
$$

La relación de definición, además de estar compuesta por los cuatro términos obtenidos a partir de los generadores, está compuesta por sus productos dos a dos, tres a tres, etc. Resulta evidente que estos productos también proporcionan columnas sólo de masas y que, por lo tanto, forman parte de la relación de definición.

En general, un diseño 2^{k-p} tiene p generadores y 2^p términos en la relación de definición (incluyendo la I); si no se incluye tiene 2^{p-1} términos.

Una vez se tiene la relación de definición se puede calcular el patrón de confusión, de forma análoga a cómo se hizo anteriormente. La única diferencia es que ahora cada efecto estará confundido con 15 efectos más, cosa perfectamente razonable, ya que en 2^7 se pueden estimar 128 efectos; si sólo realizamos los ocho experimentos correspondientes a un 2^{7-4}, sólo podemos estimar ocho efectos y, por tanto, cada uno de ellos tiene que estimar 128/8 = 16, es decir, cada efecto tiene que estar confundido con otros 15. En este caso el patrón de confusión es:

A + BD + CE + ABCF + BCG + ABCDE + CDF + ACDG + BEF + ABEG + FG + ADEF + DEG + ABDFG + ACEFG + BCDEFG B + AD + ABCE + CF + ACG + CDE + ABCDF + BCDG + AEF + EG + ABFG + BDEF + ABDEG + DFG + BCEFG + ACDEFG C + ..

Como se ve, el patrón de confusión es, en los diseños altamente fraccionados, tedioso de calcular y escasamente informativo. Por ello, cuando el número de confusiones es muy elevado, se suele utilizar el patrón de con-

fusión restringido, en el que sólo se representan los efectos principales y las interacciones de dos factores. En este caso es:

$$\begin{array}{ll} A + BD + CE + FG, & B + AD + CF + EG \\ C + AE + BF + DG, & D + AB + CG + EF \\ E + AC + BG + DF, & F + BC + AG + DE \\ & G + CD + BE + AF \end{array}$$

6.4.3. Diseños intermedios

Entre las medias fracciones y los diseños saturados, existe toda una gama intermedia de diseños, que permiten realizar menos experimentos que las medias fracciones y con confusiones más favorables que los diseños saturados. Así, entre el 2^{7-1} y el 2^{7-4} existen el 2^{7-2} y el 2^{7-3}.

El procedimiento a seguir para su construcción es el mismo: escribir el diseño completo correspondiente al número de experimentos que se desea realizar y asignar los factores restantes a las interacciones.

El problema con los diseños intermedios es que no siempre es evidente a qué interacciones hay que asignar los factores restantes para obtener diseños de máxima resolución (que son los que tienen un patrón de confusión más favorable). El criterio, intuitivamente razonable, de asignarlos a las interacciones de mayor orden disponibles no suele proporcionar el mejor diseño.

Veamos un ejemplo. Supóngase que se desea estudiar los efectos de siete variables, pero que en un primer experimento (estrategia secuencial) sólo se está dispuesto a realizar 16 experimentos.

Ello implica realizar un diseño 2^{7-3}. Para construirlo se parte de un diseño completo 2^4 y se asignan los tres factores restantes a interacciones. En la tabla siguiente aparece la matriz de diseño completa correspondiente al 2^4 y dos posibles asignaciones. Un posible conjunto de generadores sería, siguiendo el criterio de utilizar las interacciones de mayor orden disponibles (primera asignación): E = ABCD, F = ABC, G = BCD Con lo que la relación de definición sería:

$$I = ABCDE = ABCF = BCDG = DEF = AEG = ADFG = BCEFG$$

Y por lo tanto el diseño resultante es un 2^{7-3}_{III}. Mientras que, en la segunda asignación (nótese que en este caso no se utiliza la interacción de cuarto orden), los generadores son:

$$E = ABC, \;\; F = BCD, \;\; G = ACD$$

La relación de definición resultante es:

$$I \;\; = \;\; ABCE = BCDF = ACDG = ADEF = BDEG = ABFG = CEFG$$

Y, en consecuencia, proporcionan un diseño 2^{7-3}_{IV}. Por supuesto, para llevar a cabo el experimento sólo son necesarias las columnas correspondientes a los factores, esto es, las correspondientes a A, B, C, D, E, F y G.

	PRIMERA ASIGNACION										F			G	E
	PRIMERA ASIGNACION										E		G	F	
Exp	A	B	C	D	AB	AC	AD	BC	BD	CD	A BC	ABD	ACD	BCD	ABCD
1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
3	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1
4	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1
5	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
6	-1	-1	1	-1	-1	1	- 1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1
7	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	- 1	-1	1	1	1	-1	1
8	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1
10	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	- 1	-1	-1	1	1
11	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
13	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1
14	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
15	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
16	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

6.5. Bloqueo

En capítulos anteriores se introducía la utilidad de bloquear los diseños factoriales completos, cuando se sospechaba que las condiciones bajo las que

se iban a llevar a cabo los diferentes experimentos no eran homogéneas. Se comentaba que en la industria el motivo más frecuente para recurrir al bloqueo era el tener que llevar a cabo los experimentos a lo largo de un período dilatado de tiempo, pero que otros motivos frecuentes eran cambios de turno, de operario, de materia prima, etc. Lógicamente, lo mismo sucede con los fraccionales.

Como ya se vio en los capítulos anteriores, bloquear resulta de utilidad cuando el efecto que provoca la falta de homogeneidad en las condiciones de realización del experimento es aditivo. Es decir, no provoca cambios en los efectos del resto de factores ni interaccionan con ellos. Sólo provoca un cambio en el nivel de la respuesta, que se traduce en un cambio de nivel en la media.

¿Cómo se bloquea un diseño factorial? Para construir diseños en bloques se utiliza el mismo principio que para construir diseños fraccionales. Confundir el efecto del bloque con alguna interacción, a ser posible, de las consideradas despreciables *a priori*.

6.5.1. Bloqueo de factoriales completos

Veamos qué ocurre (tabla 6.6) cuando un diseño 2^3 se divide en dos bloques, confundiendo el efecto del bloque con la interacción de tres factores. Designamos a los factores de bloqueo mediante números para distinguirlos de las variables del experimento, que siempre hemos designado mediante letras mayúsculas.

	Factores						1	
#	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	Bloque
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	I
2	1	-1	-1	-1	-1	1	1	II
3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	II
4	1	1	-1	1	-1	-1	-1	I
5	-1	-1	1	1	-1	-1	1	II
6	1	-1	1	-1	1	-1	-1	I
7	-1	1	1	-1	-1	1	-1	I
8	1	1	1	1	1	1	1	II

Tabla 6.6: Diseño 2^3 con dos bloques

Nótese que todos los experimentos del bloque I corresponden a los signos menos de la interacción ABC y todos los del bloque II a los signos más. La figura 6.2 muestra la situación.

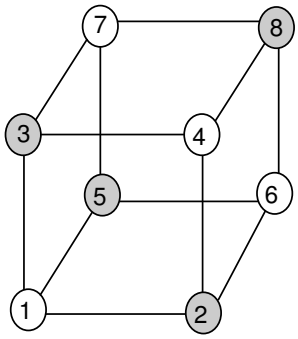

Figura 6.2: Diseño 2^3 en dos bloques de cuatro experimentos cada uno

En la figura 6.2, los experimentos enmarcados en un círculo gris corresponden al bloque I y los blancos al bloque II. Obsérvese que en cada cara del cubo hay dos experimentos de cada bloque, con lo que al calcular los efectos principales, diferencias entre las medias de las caras, el efecto bloque queda compensado. Lo mismo ocurre con las interacciones de dos factores.

Esta propiedad, que no es más que una consecuencia de la ortogonalidad, se puede observar también en la tabla 6.7, imaginando que se va a aplicar el algoritmo de los signos. Por el contrario, la interacción de tres factores estará confundida con el efecto bloque, ya que el diseño se ha construido precisamente a partir de esa confusión. De hecho, el generador del diseño es:

$$I = ABC$$

y la relación de definición es:

$$I = ABC$$

Con lo que el patrón de confusión resultante es el que aparece en la tabla 6.7

Como quiera que ya se ha comentado que los factores de bloqueo no interaccionan con las variables del experimento (esas interacciones son cero), el único efecto confundido es el de la interacción ABC. En lo sucesivo, escribiremos directamente el patrón de confusión sin incluir esas interacciones.

6.5.2. Factoriales completos divididos en más de dos bloques

Si el experimento anterior se hubiese tenido que llevar a cabo en cuatro días en lugar de dos, el diseño se hubiese tenido que dividir en cuatro bloques de dos experimentos cada uno. Veamos cómo hacerlo.

Patrón de confusión incluidas Patrón de confusión del 2^3	Interacciones de factores de bloque En 2 bel de 4 expedid.
media + ABC	media
A + BC	A
B + AC	B
C + AB	C
AB + C	AB
AC + B	AC
BC + A	BC
ABC + 1	ABC + 1

Tabla 6.7: Patrón de confusión de un 2^3 dividido en dos bloques

Para ello habrá que introducir dos generadores de bloque (en general para conseguir 2^k bloques se requieren k generadores de bloque):

$$\begin{aligned} 1 &= AB \\ 2 &= AC \end{aligned}$$

La matriz de diseño será la de tabla 6.8

	Factores			1	2	
#	A	B	C	AB	AC	Bloque
1	-1	-1	-1	1	1	I
2	1	-1	-1	-1	-1	II
3	-1	1	-1	-1	1	III
4	1	1	-1	1	-1	IV
5	-1	-1	1	1	-1	IV
6	1	-1	1	-1	1	III
7	-1	1	1	-1	-1	II
8	1	1	1	1	1	I

Tabla 6.8: Matriz de diseño de un 2^3 en cuatro bloques de dos experimentos (un factor de bloqueo)

El criterio utilizado para asignar experimentos a bloques es que aquellos que tienen los mismos signos en los dos generadores de bloque quedan incluidos en el mismo bloque. Con estos generadores de bloques, la relación de definición queda:

$$I = AB1 = AC2 = BC12$$

media	AB + 1
A	AC + 2
B	BC + 12
C	ABC

Y, por tanto, el patrón de confusión es:

Hay varios aspectos destacables en este patrón de confusión:

En primer lugar que la interacción BC aparece confundida con 12, cuando se ha dicho que los bloques no interaccionan. La explicación es simple: entre los cuatro bloques definidos hay tres grados de libertad (análogamente, en el caso anterior entre los dos bloques definidos había un grado de libertad) y, por tanto, se requieren tres columnas para poder estimar sus efectos. Por tanto, 12 no define una interacción entre bloques, sino que define un factor de bloqueo exactamente con las mismas implicaciones que el factor 1 o el factor 2.

Por otra parte, se requiere que la interacción ABC no esté confundida con ningún efecto bloque.

Se deja al lector que averigüe las consecuencias de utilizar la interacción triple como generador de bloque. En este caso resulta sencillo hallar los generadores más apropiados, pero en general puede ser un problema complejo; por ello en la sección 7.6 se proporcionan tablas (tabla de grupos) para facilitar el bloqueo.

El diseño construido es de resolución III, ya que las interacciones de dos están confundidas con efectos de un sólo "factor", aunque en este caso sea de bloqueo. La resolución de los diseños bloqueados es, como en los fraccionales, la longitud del término más corto de la relación de definición, con la única consideración de que en los términos con interacciones entre factores de bloqueo, éstas cuentan como un solo factor. Así, el término AC12 tiene longitud tres.

6.5.3. Fraccionales divididos en bloques

Hasta ahora hemos bloqueado diseños factoriales completos. La técnica es igualmente útil para bloquear diseños factoriales fraccionales.

Considérese el caso en el que se desean estudiar 6 variables en cuatro bloques y solamente dieciséis experimentos. Lo que se requiere es un diseño 2^{6-2} divido en cuatro bloques. Los generadores, que se pueden hallar en la tabla de grupos, son:

$$E = ABC \qquad F = BCD$$
$$1 = ACD \qquad 2 = ABD$$

Se requieren dos generadores para el fraccional y dos para los bloques. Estos generadores se podrían haber hallado por tanteo, lamentablemente no hay ninguna regla que permita hallarlos de forma sencilla, pero hubiese resultado tedioso.

En la tabla 6.9 aparece la matriz de diseño, ya dividida en bloques.

					ABC	BCD	ACD	ABD	
	A	B	C	D	E	F	1	2	Bloque
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
8	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	I
10	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	
15	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	
3	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	II
12	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	
13	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	
4	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	
5	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	III
11	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	
14	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	
2	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	
7	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	IV
9	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	
16	1	1	1	1	1	1	1	1	

Tabla 6.9: Diseño 2^{6-2}

La relación de definición es:

$$\begin{aligned} I &= ABCE = BCDF = ACD1 = ABD2 \\ &= ADEF = BDE1 = CDE2 = ABF1 = ACF2 = BC12 \\ &= CEF2 = BEF2 = AE12 = DF12 \\ &= ABCDEF \end{aligned}$$

Aparentemente el diseño es de resolución IV, pero recuérdese que 12 es de longitud uno y, por tanto, los términos en los que aparece son de longitud tres, por lo que el diseño es de resolución III. El patrón de confusión que proporciona es:

Como se ve, las confusiones no están repartidas uniformemente. En otros diseños la distribución puede ser mucho más irregular, por lo que, al asignar las variables del experimento a las columnas de la matriz de diseño, es

Confundidos con tres o más	Confunsiones más serias
media	AB + CE
A	AC + BE
B	BC + AE + DF + 12
C	AD + EF
D	BD + CF
E	CD + BF
F	AF + DE
1	
2	

Tabla 6.10: Patrón de confusión

conveniente tener presente el patrón de confusión, y realizar la asignación de manera que aquellos efectos que *a priori* parezcan más importantes les correspondan confusiones más favorables.

Hallar los generadores que proporcionan diseños fraccionales bloqueados con máxima resolución no es tarea sencilla, ya que desgraciadamente no existe una regla y se han de hallar por tanteo. Por ello la tabla grupos de la sección siguiente proporciona los generadores para los diseños más comúnmente utilizados.

6.6. Uso del SPSS

Los diseños factoriales fraccionarios se resuelven mediante la aplicación SPSS, ejecutando la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> Univariado
```

La caja de diálogo asociada se ilustra en la figura 6.3

Los campos de interés para los diseños factoriales fraccionarios son:

Dependiente: ubique en este campo la variable dependiente o respuesta de interés en el diseño.

Factores: traslade desde la lista de variable del archivo activo aquellas variables consideradas como factores del diseño.

Modelo: en este campo se selecciona un modelo Personalizado, al construir términos se especifica cuales son los efectos principales e interacciones de interés en el diseño estudiado.

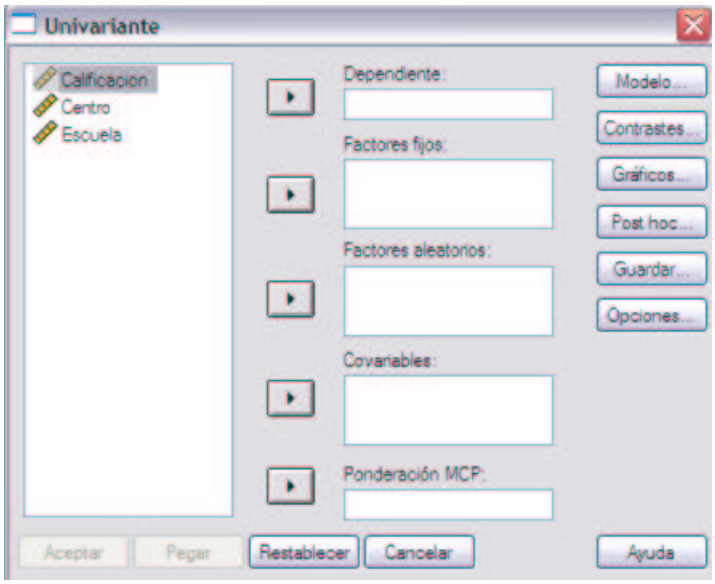

Figura 6.3: Univariado

Opciones: permite mostrar las medias marginales para cada factor, además de los estadísticos descriptivos, la potencia estimada y el tamaño del efecto, entre otros campos presentes en la caja de diálogo asociada.

6.7. Solución de problemas

Problema 6.1 (Diseño 2^{3-1}) *Un productor piscícola desea controlar el efecto de la temperatura, la densidad de los alevines en los criaderos y el proveedor de los alevines, en el crecimiento de estos. Para tal fin utiliza dos criaderos de 500 litros cada uno en los cuales cría 120 y 150 alevines respectivamente, adquiere alevines a dos proveedores en la zona y mantiene la temperatura de los criaderos a 27 y 33 grados centígrados cada uno. El peso de los alevines se mide en miligramos. Por razones económocas y experiencia previa, decide realizar un experimento fraccionado a la mitad. La información del ensayo se resume en la tabla siguiente:*

- *Identificar la estructura de alias del diseño.*
- *Resolver el diseño*

Orden		Factores			
estándar	aleatorio	A	B	C	Peso
1	4	-1	-1	-1	320
2	8	1	-1	-1	280
3	5	-1	1	-1	198
4	7	1	1	-1	87
5	1	1	-1	1	245
6	6	1	-1	1	120
7	2	-1	1	1	110
8	3	1	1	1	90

Tabla 6.11: Matriz de diseño de un 2^{3-1}

El diseño es la fracción media de un diseño factorial completo 2^3, es decir; de los 8 tratamientos, sólo se consideran 4. Según la tabla 6.11; los efectos principales considerados fueron A y B, el tercer factor se confunde con la interacción de estos. La estructura de identidad es $I = ABC$, además A se confunde con BC y B con AC, la fracción complementaria es $I = -ABC$.

El diseño se resuelve usando SPSS, mediante la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> Univariante
```

En la caja de diálogo asociada seleccione los campos siguientes:

```
Variable dependiente: Peso
Factores fijos: Temperatura, densidad, proveedor
Modelo:
  Personalizado: Efectos principales:
                          Temperatura, densidad
                 Interacción: Temperatura*densidad
  continuar
 Opciones: mostrar medias marginales para:
                             Temperatura, densidad
     Continuar
    Aceptar
```

El primer reporte de interés es la tabla del ANOVA del diseño, ver tabla 6.12.

Para un nivel de significancia del 3 %, se tiene que el $p - valor$ de cada contraste de interés: significancia de la temperatura, de la densidad y del proveedor, todos son superiores a 0.03, es decir se acepta la hipótesis nula,

Fuente	Sumas	Gl.	Medias	F	Sig
Modelo corregido	41359,000[a]	3	13786.333	3.059	.154
Intersección	259074.107	1	259074.107	57.487	.002
A	12458.679	1	12458.679	2.765	.172
B	36666.964	1	36666.964	8.136	.046
A*B	668.679	1	668.679	.148	.720
Error	18026.500	4	4506.625		
Total corregido	322198.000	8			
Total	59385.500	7			

a: r-cuadrado =.696

Tabla 6.12: Tabla ANOVA del diseño 2^{3-1}

los efectos principales son no significativos, pero, al recordar la estructura de alias del diseño, se puede concluir que los efectos productos de las interacciones de segundo orden tampoco son significativas, por ser un diseño de resolución III, no es posible, a partir de la información aportada en la tabla dar conclusiones acerca de la significancia de la interacción de orden tres, la cual fue sacrificada por el investigador.

Problema 6.2 (Diseño 2^{7-4}_{III}) *Un fabricante de tubos de escape tenía problemas en una operación de curvado y decidió llevar a cabo una investigación para hallar mejores condiciones de funcionamiento. El objetivo era múltiple; sin embargo, nos centraremos en conseguir el diámetro del tubo deseado. La máquina era nueva, lo que motivó que se identificasen como potencialmente importantes siete variables y que se conociese muy poco sobre ellas a priori. Además, se disponía de poco tiempo para experimentar. Bajo estas condiciones un diseño saturado parecía idóneo. Las variables y niveles eran los de la tabla 6.13.*

		Nivel	
Código	Variable	-1	1
A	Presión mordaza	50	60
B	Presión seguidor	45	55
C	Velocidad seguidor	-5	+5
D	Velocidad eje y	7	9
E	Velocidad eje b	7	9
F	Velocidad eje c	7	9
G	Longitud del tubo	0.5	1.2

Tabla 6.13: Variables y niveles del diseño

La matriz de diseño utilizada aparece en la tabla

EXP. NÚM.	A	B	C	AB D	AC E	BC F	ABC G	RESP. DIAM.
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	77.40
2	1	-1	-1	-1	-1	1	1	68.30
3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	81.90
4	1	1	-1	1	-1	-1	-1	66.20
5	-1	-1	1	1	-1	-1	1	42.10
6	1	-1	1	-1	1	-1	-1	78.30
7	-1	1	1	-1	-1	1	-1	39.00
8	1	1	1	1	1	1	1	68.40

Tabla 6.14: Matriz de diseño 2^{7-4}.

Por supuesto los experimentos se llevaron a cabo en orden aleatorio y se tomaron diversas precauciones para medir el diámetro. De hecho, se realizaron cinco tubos bajo cada condición experimental (no constituyen auténticas réplicas) y la respuesta que se muestra es el promedio.

Nótese que, tras escribir un 2^3 completo, se asignó una nueva variable a cada una de las interacciones disponibles. Por tanto, este diseño tiene cuatro generadores que son:

$$D = AB, \quad E = AC, \quad F = BC, \quad G = ABC$$

Con lo que la relación de definición es:

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{I} = \mathrm{ABD} = \mathrm{ACE} = \mathrm{BC} = \mathrm{ABCG} \\ \text{(productos de dos)} & = \mathrm{BIDE} = \mathrm{ACED} = \mathrm{CD} = \mathrm{ABEL} = \mathrm{BEG} = \mathrm{AFG} \\ \text{(productos de tres)} & = \mathrm{DEF} = \mathrm{ADEN} = \mathrm{BLDG} = \mathrm{CEFG} \\ \text{(productos de cuatro)} & = \mathrm{ABCDEFG} \end{array}$$

El diseño 2^3 que será corrido se resume en la tabla 6.15:

La solución del diseño de interés, mediante SPSS se logra al ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> Univariante
```

En la caja de diálogo asociada seleccione los campos siguientes:

```
Variable dependiente: diámetro
Factores fijos:Presion de la mordaza, presión del seguidor
```

-1	-1	1	77.40
1	-1	-1	68.30
-1	-1	1	81.90
1	-1	-1	66.20
-1	1	-1	42.10
1	1	1	78.30
-1	1	-1	39.00
1	1	1	68.40

Tabla 6.15: Diseño 2^3

```
                Velocidad del seguidor
Modelo:
  Personalizado: Efectos principales:
              Presión de la mordaza, presión del seguidor
                Velocidad del seguidor
             Interacciones:
                Presión de la mordaza*presion del seguidor
                Presión de la mordaza*Velocidad del seguidor
                Presión del seguidor*Velocidad del seguidor
  continuar
 Opciones: mostrar medias marginales para:
             Presión de la mordaza, presión del seguidor
             Velocidad del seguidor
     Continuar
    Aceptar
```

El primer reporte de interés es la tabla del ANOVA del diseño, ver tabla 6.16

Según el reporte de la tabla 6.16 el modelo explica el 96.4 % de la variabilidad de la respuesta; por otra parte, el $p - valor$ asociado a los tres factores de interés es inferior al nivel del significancia del 5 %, es decir el curvado del tubo depende de los tres factores. Para entender mejor el efecto de cada factor, es recomendable observar las tablas de marginales.

Problema 6.3 *Se realizó un ensayo para investigar el efecto de tres factores sobre la operación de un torno para metales, cada uno con dos niveles, los cuales se representan en la tabla 6.17*

La cantidad de tratamientos necesarios para llevarlo a cabo excede las posibilidades de realizarlo utilizando un diseño factorial completo, por tal razón el investigador opta por una fración mitad del diseño. A fin de sac-

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig.
Modelo corregido	1774,100[a]	3	591.367	35.765	.002
Modelo corregido	41359,000[a]	3	13786.333	3.059	.154
Intersección	34008.320	1	34008.320	2056.748	.000
A	208.080	1	208.080	12.584	.024
B	544.500	1	544.500	32.930	.005
C	1021.520	1	1021.520	61.779	.001
Error	66.140	4	16.535		
Total	35848.560	8			
Total corregido	1840.240	7			

a. R cuadrado = .964 R cuadrado corregida = .937

Tabla 6.16: Tabla ANOVA

	Niveles	
	1	2
velocidad de rotación	60	80
ángulo de corte	30	45
frecuencia de lubricación	10 seg	15 seg

Tabla 6.17: Niveles de los factores

rificar la mínima información posible, se selecciona la interacción I= ABC como contraste de definición. El diseño se corre para doce cortes distintos.La información obtenida en la aplicación del diseño se resume en la tabla siguiente:

	Combinación de tratamientos				
	$a_2b_1c_1 = a$	$a_1b_2c_1 = b$	$a_1b_1c_2 = c$	$a_2b_2c_2 = abc$	
	18	13	19	15	
	16	12	18	16	
	15	13	20	14	
Total	49	38	57	45	189

Tabla 6.18: Matriz de datos del experimento

- *Escribir detalladamente el modelo matemático*
- *Estudiar los efectos significativos*
- *Construir el ANOVA e interpretar los resultados*

Por razones económicas se corre la fracción mitad 2^{3-1} con patrón de confusión:

$$A = BC,\ \ B = AC,\ \ C = AB$$

El modelo matemático asociado al diseño es:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijkl}$$

cuando:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \alpha_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^{2} \beta_j &= 0 \\ \sum_{k=1}^{2} \gamma_k &= 0 \\ \varepsilon_{ijkl} &\sim N(0\sigma^2) \end{aligned}$$

Para correr el diseño fraccionado, es necesario ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> Univariante
```

En la caja de diálogo asociada se seleccionan los campos:

```
Variable dependiente: corte
 Factores fijos:velocidad de rotación, ángulo de corte
                frecuencia de lubricación
 Modelo:
   Personalizado: velocidad de rotación, ángulo de corte
                  frecuencia de lubricación

   continuar
  Opciones: mostrar medias marginales para:
                     velocidad de rotación, ángulo de corte
                     frecuencia de lubricación
      Continuar
     Aceptar
```

El primer reporte de interés es la tabla de ANOVA (ver tabla 6.19). El $p-valor$ del factor A es mayor que $\alpha = 5\,\%$ es decir, al nivel del significancia del 5 % se rechaza el efecto significativo del factor A y los demás factores confundidos con él, por otra parte, como el $p - valor$ asociado a los dos factores restantes son menores a 0.05, se acepta la significancia de los efectos de ellos y de los efectos confundidos con estos.

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig.
Modelo corregido	62,917[a]	3	20.972	17.976	.001
Intersección	2976.750	1	2976.750	2551.500	.000
A	.083	1	.083	.071	.796
B	44.083	1	44.083	37.786	.000
C	18.750	1	18.750	16.071	.004
Error	9.333	8	1.167		
Total	3049.000	12			
Total corregido	72.250	11			

a. R cuadrado = .871 R cuadrado corregida = .822

Tabla 6.19: ANOVA diseño fraccionado

Una lectura de las tablas 6.20, 6.21 y 6.22 permite entender el comportamiento de la variable respuesta, ante los niveles de los factores.

			Intervalo de confianza 95 %	
A	Media	Error típ.	Límite inferior	Límite superior
1	15.833	.441	14.816	16.850
2	15.667	.441	14.650	16.684

Tabla 6.20: Marginales del factor A

En la tabla 6.20 en la primera columna se observa un patrón similar para los valores estimados de las medias, pero con un pequeño incremento en el nivel 1, mientras que en las tablas 6.21 y 6.22 se observan diferencias en los valores estimados para las medias, para el factor B el promedio en el factor 1 es superior, pero en el factor C se invierte la estimación.

			Intervalo de confianza 95 %	
B	Media	Error típ.	Límite inferior	Límite superior
1	17.667	.441	16.650	18.684
2	13.833	.441	12.816	14.850

Tabla 6.21: Marginales del factor B

Para el factor B ángulo de corte se observa que cuando el águlo de corte es de 30 el valor promedio de la variable respuesta es de 17.667 mientras que para un ángulo de corte de 45 se observa un valor promedio de 13.883.

			Intervalo de confianza 95 %	
C	Media	Error típ.	Límite inferior	Límite superior
1	14.500	.441	13.483	15.517
2	17.000	.441	15.983	18.017

Tabla 6.22: Marginales del factor C

Observaciones similares se tienen al leer la tabla de marginales del factor C, cuando la frecuencia de lubricación es de 10 seg. el valor promedio de la variable respuesta es de 14.50, mientras que en con la frecuencia de lubricación de 15 seg. la respuesta promedio es de 17.00.

Finalmente, la mejor combinación de efectos a utilizar es cualquier nivel del factor A, nivel 1 del factor B y nivel 2 del factor C.

Capítulo 7

Diseños Jerárquicos

7.1. Preliminares

El *diseño Jerárquico*, conocido también como *diseños con factores anidados o Diseño de sujetos intragrupos intratratamientos*, es una modalidad de diseño asociado al procedimiento de control experimental conocido como *técnica de anidamiento*

Se trata de un diseño de investigación en el cual los niveles de al menos uno de los factores, que generalmente es de clasificación, (*Variable anidada), se representa únicamente en uno de los niveles de una variable de tratamiento (*variable de anidamiento). Por tanto, es un diseño estructuralmente incompleto en el que se generan menos condiciones experimentales que combinaciones posibles entre los factores.

Normalmente, la *variable anidada* se considera como una fuente de confundido cuyos efectos pueden ser eliminados de la varianza total. En consecuencia, suele ser una *variable de naturaleza aleatoria*; con frecuencia la variable anidada representa un grupo natural cual pertenecen los sujetos experimentales.

Partiendo de este hecho, los diseños jerárquicos son de especial utilidad en estudios en los que la pertenencia a un grupo de interés, implica poseer una serie de característica que están determinadas por el propio grupo y que influyen en la variable respuesta, permitiendo así, analizar la variabilidad atribuible al efecto del factor anidado.

De hecho, los diseños jerárquicos introducen el efecto de pertenencia al grupo como fuente de variabilidad en el modelo matemático del análisis de la varianza, controlando de esta manera, la influencia que puede ejercer el grupo sobre la respuesta. La cualidad más importante de los diseños jerárquicos radica en permitir eliminar una fuente de variabilidad sistemática secundaria,

asociada a las diferencias entre los niveles del factor anidado, que, en caso de no controlarse, impedirían estimar con precisión los efectos del anidamiento.

7.2. Diseños anidados

En algunas situaciones no se pueden combinar todos los niveles de un factor con todos los niveles de otro, es decir, no se pueden determinar todos los posibles tratamientos que aparecen al cruzar los factores. Esta es la razón básica de los diseños anidados, en los cuales el investigador se fundamenta para controlar la varianza del error. Vemos un ejemplo introductorio.

Ejemplo 7.1 *Supongamos que en un centro de formación profesional se estudia el porcentaje de aprobados en una asignatura, en los grupos de mañana y de tarde. Por la mañana imparten la asignatura dos personas y por la tarde tres. Cada persona da clase a tres grupos y se supone que estos son réplicas (no son fuente de variación)*

Así,

$$\begin{aligned} \text{Factor A} &= \text{Turno}(i = 1, 2) \\ \text{Factor B} &= \text{Persona}(j = 1, 2, 3, 4, 5) \\ Y_{ij} &= \text{Porcentaje de aprobados} \end{aligned}$$

Las observaciones de este diseño se pueden representar en una tabla como la ilustrada en la tabla 7.1

Mañana			Tarde	
P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Obs_1	Obs_1	Obs_1	Obs_1	Obs_1
Obs_2	Obs_2	Obs_2	Obs_2	Obs_2
Obs_3	Obs_3	Obs_3	Obs_3	Obs_3

Tabla 7.1: ANOVA anidados: datos

En este modelo se dice que el factor B está anidado en el factor A, es decir $B \subset A$.

En general se dice que un factor B está anidado en otro factor A (o que sus niveles están anidados en los de A) cuando cada nivel del factor B aparece asociado a un único nivel del factor A. Se denota como $B \subset A$.

El modelo matemático que resume este tipo de diseños se expresa como:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

$$i = 1, \cdots, a \;\; j = 1, \cdots, b \;\; k = 1, \cdots, N$$

Y_{ijk}**:** es la puntuación del individuo k, perteneciente al grupo establecido por el nivel j del factor B anidado en el nivel i del factor A.

μ**:** es la media global de la muestra total, media poblacional de la variable Y.

α_i**:** es el efecto debido al nivel i del factor A, se supone satisface la condición $\sum_{i=1}^{a} \alpha_1 = 0$.

$\beta_{j(i)}$**:** es el efecto medio adicional del $j-$ésimo nivel del factor B anidado en el $i-$ésimo nivel del factor A.

ε_{ijk}**:** es el error del modelo lineal o desviaciones aleatorias al rededor de la media, se suponen independientes y distribuidas $N(0, \sigma^2)$.

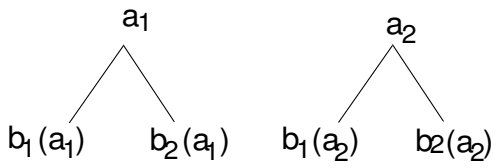

Figura 7.1: Diseño jerárquico: un factor anidado un factor anidante

Por otro lado, b es el número de niveles anidados en cada nivel i, de modo que el número total de niveles de B es ab y la suma de los efectos del factor B dentro de cada nivel de A es 0.

Si se considera la suma de cuadrados total

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{N}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...})^2$$

la cual se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...})^2 &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2\end{aligned}$$

Es decir

$$SS_T = SS_A + SS_{B(A)} + SS_E$$

El número total de observaciones es abn y el número total de parámetros a estimar es $1+(a-1)+a(b-1) = ab$, luego el número de grados de libertad total es $abn - ab = ab(n-1)$.

Los estimadores del modelo lineal este tipo de diseño son:

$$\widetilde{\mu} = \overline{Y}_{...} \qquad \widetilde{\alpha}_i = \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}$$
$$\widetilde{\beta}_{(i)j} = \overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} \qquad \widetilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2}{ab(n-1)}$$

La tabla de ANOVA para este tipo de diseño es:

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de. libertad	Media cuadrática	test F	Sig.
Factor A	SS_A	$a-1$	$MC_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$\frac{MC_A}{MC_W}$	p
Factor B	SS_B	$b-1$	$MC_{B(A)} = \frac{SS_B}{b-1}$	$\frac{MC_B}{MC_W}$	p
Intragrupos	SS_W	$N-ab$	$MC_W = \frac{SS_W}{N-ab}$		
Total	SS_T	$N-1$			

Tabla 7.2: Tabla ANOVA anidados

Los contrastes de hipótesis que se pueden realizar en este tipo de diseño son:

Contraste para efecto medio del factor A : para establecer si existe efecto medio sobre la variable dependiente asociado a cada nivel del factor A se contrastan las hipótesis:

$$H_0 \;:\; \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0 \text{ (el factor } A \text{ no influye)}$$
$$H_1 \;:\; \text{algún } \alpha_i \neq 0 \text{ (el factor } A \text{ influye)}$$

el estadístico de prueba se define como:

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_E}$$

el cual se distribuye $F_{(a-1),(n-1)ab}$ bajo la hipótesis nula.

Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste relativo a la existencia de una componente asociada al efecto del factor A, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &\leq F_{\alpha,(a-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &> F_{\alpha,(a-1),(n-1)ab} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

Contraste para efecto medio del factor B: cuando nuestro interés está centrado en establecer si existe efecto medio sobre la variable dependiente asociado a cada nivel el factor B se contrastan las hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_{(i)1} = \beta_{(i)2} = \cdots = \beta_{(i)b} = 0 \text{ (el factor } B \text{ no influye)} \\ H_1 &: \text{ algún } \beta_{(i)j} \neq 0 \text{ (el factor } B \text{ influye)} \end{aligned}$$

el estadiístico de prueba se define como:

$$F_{B(A)} = \frac{MS_{B(A)}}{MS_E}$$

el cual se distribuye $F_{a(b-1),(n-1)ab}$ bajo la hipótesis nula.

Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste asociado a la existencia de una componente asociada al efecto del factor B, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_{B(A)} &\leq F_{\alpha,a(b-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_{B(A)} &> F_{\alpha,a(b-1),(n-1)ab} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

Si al nivel α se rechaza H_0, se contrasta la hipótesis de que todos los niveles del factor anidado B son iguales dentro del factor A donde están anidados. Sin embargo, si se obtiene que son distintos a nivel global, es interesante contrastar, a continuación, si los niveles del factor B anidado en A son iguales entre sí, dentro de cada nivel i (de A) en el que están anidados.

Así, para cada nivel fijado de i, donde $i = 1, \cdots, a$ se contrasta si los niveles del factor anidado son iguales o no dentro de cada uno de los

niveles del factor A en el que están anidados de manera individual, mediante el contraste de hipótesis:

$$\begin{array}{lll} H_0 & : & \beta_{(i)1} = \beta_{(i)2} = \cdots = \beta_{(i)b} = 0 \text{ (el factor } B \text{ no influye)} \\ H_1 & : & \text{algún } \beta_{(i)j} \neq 0 \text{ (el factor } B \text{ influye)} \end{array}$$

el estadístico de prueba se define como:

$$F_{B(A)_i} = \frac{MS_{B(A)_i}}{MS_E}$$

el cual se distribuye $F_{(b-1),(n-1)ab}$ bajo la hipótesis nula. Donde

$$MS_{B(A)_i} = \frac{SS_{B(A)_i}}{b-1}$$

y

$$\begin{aligned} SS_{B(A)_i} &= \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..})^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{1}{bn}y_{i..}^2 \end{aligned}$$

Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste asociado a la existencia de una componente asociada al efecto del factor B, será:

$$\begin{array}{c} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_{B(A)_i} \leq F_{\alpha,(b-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_{B(A)_i} > F_{\alpha,(b-1),(n-1)ab} \end{array}$$

Lo cual equivale en términos del $p-valor$, aceptar H_0 si $p-valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

Ejemplo 7.2 *En la Unidad Educativa San Luis, se imparte docencia en dos turnos: Mañana y Tarde, en la mañana dos docentes enseñan literatura y tres en la tarde. Cada persona eneseña a tres grupos y se supone que estos son replicas; se registra el número de alumnos aprobados en cada grupo en la tabla siguiente:*

Turno						
Mañana			Tarde			
Docente			Docentes			
D1	D2	D3	D1	D2	D3	
10	12	13	14	15	10	
12	11	14	15	12	10	
12	11	15	15	13	17	
34	34	42	44	40	37	$y_{ij.}$
110			121			$y_{i..}$
231						$y_{...}$

Tabla 7.3:

A partir de la información resumida en la tabla anterior, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 = 3037 \quad y_{...} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk} = 231$$

$$\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 = 26741 \quad \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 = 8981$$

Luego las sumas de cuadrados son:

$$SC_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{1}{abn} y_{...}^2 = 30{,}37 - \frac{231^2}{18} = 72{,}5$$

$$SC_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - \frac{1}{abn} y_{...}^2 = \frac{26741}{9} - \frac{231^2}{18} = 6{,}722$$

$$\begin{aligned} SC_{B(A)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 \\ &= \frac{8981}{3} - \frac{26741^2}{9} = 22{,}44 \\ SC_E &= SC_T - SC_A - SC_{B(A)} = 43{,}34 \end{aligned}$$

De donde la tabla del ANOVA es:

El valor crítico del estadístico de prueba del diseño estudiado al nivel de significancia del 5 % es:

$$\begin{aligned} F_{1,12,\cdot 05} &= 4,75 \\ F_{4,12,\cdot 05} &= 3{,}26 \end{aligned}$$

Fuente de variación	Sumas de cuadrados	Grados de libertad	Medias cuadráticas	F
Factor A	6.72	1	6.72	1.87
Factor $B(A)$	22.44	4	5.61	1.554
Error	43.34	12	3.61	
Total	72.50	17		

Tabla 7.4:

Como $F_A < F_{1,12,\cdot 05}$ entonces se acepta la hipótesis nula $H_0 : \alpha_i = 0$, es decir, al nivel de significancia del 5 % el rendimiento de los alumnos no es afectado por el turno en que asista a clases.

De manera similar, $F_{B(A)} < F_{4,12,\cdot 05}$ entonces se acepta la hipótesis nula $H_0 : \beta_{j(i)} = 0$, es decir, al nivel de significancia del 5 % el rendimiento de los alumnos no es afectado por los docentes que dictan clases en la mañana o en la tarde. En conclusión, las diferencias observadas no dependen del turno ni del docente que dicta la asignatura ya sea en la mañana o en la tarde.

Hasta ahora en esta sección se han estudiado los modelos de ANOVA anidados de efectos fijos, a continuación se considerarán los casos de efectos anidados aleatorios y mixtos.

7.2.1. Modelos de ANOVA anidados de efectos aleatorios

Supongamos que el investigador está interesado en estudiar el efecto de los niveles de dos factores aleatorios A y B sobre la variable dependiente Y, bajo el supuesto adicional que los b niveles del factor B está anidados en nivel i del factor A.

$$y_{ijk} = \mu + A_i + B_{(i)j} + \varepsilon_{ijk} \tag{7.1}$$

bajo los supuestos teóricos:

y_{ijk}**:** es el $k-$ésimo valor de la variable dependiente Y asociada al nivel i del factor A y el nivel j del factor B.

μ**:** es la media de la variable Y medida sobre la población total.

$A_i \sim N(0, \sigma_a^2)$ es el efecto aleatorio (variable aleatoria) generado por el nivel i del factor A, se supone distribuido $N(0, \sigma_a^2)$ e independientes entre sí.

$B_{(i)j} \sim N(0, \sigma_b^2)$**:** es el efecto aleatorio del nivel j del factor B anidado en el nivel i del factor A, los $B_{(i)j}$ se suponen variables aleatorias independientes entre sí.

$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$**:** definen los residuos del modelo lineal, se suponen variables aleatorias independientes entre sí.

σ_a^2, σ_b^2 se conocen como las componentes añadidas de la varianza σ^2 por el factor A y el factor B, respectivamente. De donde

$$Y_{ijk} \sim N(\mu, \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma^2)$$

Los valores esperados de las medias cuadráticas son:

Tabla 7.5: Valores esperados

Media Cuadrática	Valor estimado
Factor A	$\sigma^2 + N\sigma_b^2 + bN\sigma_a^2$
Factor B	$\sigma^2 + N\sigma_b^2$
Error	σ^2

Los estimadores para los componentes de la varianza se expresan como:

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_a^2 &= \frac{MS_A - MS_{B(A)}}{bn} \\ \widetilde{\sigma}_b^2 &= \frac{MS_{B(A)} - MS_E}{n} \\ \widetilde{\sigma}^2 &= MS_E \end{aligned}$$

El contrastes de hipótesis relativo a la existencia de un componente de la varianza asociado al factor aleatorio A, será formulado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_a^2 = 0 \\ H_1 &: \sigma_a^2 \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba se define como:

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{(A)B}}$$

el cual bajo H_0 se distribuye $F_{(a-1),a(b-1)}$.

Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste relativo a la existencia de una componente asociada al efecto del factor A, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &\leq F_{\alpha,(a-1),(b-1)a} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &> F_{\alpha,(a-1),(b-1)a} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p - valor$, aceptar H_0 si $p - valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

De manera análoga el contrastes de hipótesis relativa a la existencia de un componente de la varianza asociado al factor aleatorio B, será formulado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_b^2 = 0 \\ H_1 &: \sigma_b^2 \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba se define como:

$$F_B = \frac{MS_{(A)B}}{MS_E}$$

el cual bajo H_0 se distribuye $F_{a(b-1),ab(n-1)}$.

Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste asociado a la existencia de una componente de la varianza, añadido por el efecto del factor B, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B &\leq F_{\alpha,a(b-1),(N-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B &> F_{\alpha,a(b-1),(N-1)ab} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p - valor$, aceptar H_0 si $p - valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

7.2.2. Modelos de ANOVA anidados de efectos mixtos

Este tipo de diseños permite extender los modelos de ANOVA de dos factores mixtos al caso en que los niveles de uno de los factores estén contenidos en el nivel del otro factor, distinguiéndose dentro de ellos dos tipos de diseños particulares:

- El factor que contiene anidado al otro factor es fijo y el factor anidado es aleatorio

- El factor que contiene anidado al otro factor es aleatorio y el factor anidado es fijo

Como cada uno de estos tipos de diseños presenta características particulares, es necesario efectuar el estudio en detalles de cada uno.

Modelos Anidados $B \subset A$, A fijo B aleatorio

Consideremos el modelo ANOVA de efectos anidados en el cual el factor A es fijo, el factor B es aleatorio y este último está anidado en el primero. El modelo matemático que explica este tipo de diseños se formula de la siguiente manera:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + B_{(i)j} + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

y_{ijk}**:** es el $k-$ésimo valor de la variable dependiente Y asociada al nivel i del factor A y el nivel j del factor B.

μ**:** es la media de la variable Y medida sobre la población total.

α_i**:** es el efecto fijo generado por el nivel i del factor A, se supone $\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$.

$B_{(i)j} \sim N(0, \sigma_b^2)$**:** es el efecto aleatorio del nivel j del factor B anidado en el nivel i del factor A, los $B_{(i)j}$ se suponen variables aleatorias independientes entre sí.

$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$**:** definen los residuos del modelo lineal, se suponen variables aleatorias independientes entre sí.

A partir del modelo lineal se tiene que:

$$Y_{ijk} \sim N(\mu + \alpha_i, \sigma^2 + \sigma_b^2)$$

Los valores esperados de las medias cuadráticas se resumen en la tabla 7.6

Media Cuadrática	Valor estimado
Factor A	$\sigma^2 + n\sigma_b^2 + \frac{bn}{a-1}\sum_{i=1}^{a} \alpha_i^2$
Factor B	$\sigma^2 + n\sigma_b^2$
Error	σ^2

Tabla 7.6: Valores esperados

Los estimadores de las componentes de la varianza se expresan como:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}^2 &= MS_E \\ \widehat{\sigma}_b^2 &= \frac{MS_{(A)B} - MS_E}{n} \\ \widehat{\alpha}_i &= \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...} \end{aligned}$$

El contraste de hipótesis a cerca del efecto del factor A está expresado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \;\; i = 1, 2, \cdots, a \\ H_1 &: \text{algún } \alpha_i \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba se expresa como:

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{(A)B}} \sim F_{(a-1),a(b-1)}$$

bajo la hipótesis nula. Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste relativo a la existencia de efectos asociada al factor A, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &\leq F_{\alpha,(a-1),(b-1)a} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &> F_{\alpha,(a-1),(b-1)a} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p - valor$, aceptar H_0 si $p - valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

El contraste de hipótesis a cerca del efecto del factor B está expresado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_b^2 = 0 \\ H_1 &: \sigma_b^2 \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba se expresa como:

$$F_B = \frac{MS_A}{MS_E} \sim F_{a(b-1),ab(n-1)}$$

bajo la hipótesis nula. Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste relativo a la existencia de una componente asociada al efecto del factor B, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B &\leq F_{\alpha,a(b-1),(n-1)ab} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B &> F_{\alpha,a(b-1),(n-1)ab} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p - valor$, aceptar H_0 si $p - valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

Modelos Anidados $B \subset A$, A aleatorio B fijo

Consideremos el modelo ANOVA de efectos anidados en el cual el factor A es fijo, el factor B es aleatorio y este último está anidado en el primero. El

modelo matemático que explica este tipo de diseños se formula de la siguiente manera:

$$y_{ijk} = \mu + A_i + \beta_{(i)j} + \varepsilon_{ijk}$$

donde:

y_{ijk}**:** es el $k-$ésimo valor de la variable dependiente Y asociada al nivel i del factor A y el nivel j del factor B.

μ**:** es la media de la variable Y medida sobre la población total.

A_i**:** es el efecto aleatorio (variable aleatoria) generado por el nivel i del factor A, se supone $A_i \sim N(0, \sigma_a^2)$ se suponen variables aleatorias independientes entre sí.

$\beta_{(i)j}$ es el efecto fijo del nivel j del factor B anidado en el nivel i del factor A, los $\beta_{(i)j}$ se suponen $\sum_{j=1}^{b} \beta_{(i)j} = 0$.

$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$**:** definen los residuos del modelo lineal, se suponen variables aleatorias independientes entre sí.

A partir del modelo lineal se tiene que:

$$Y_{ijk} \sim N(\mu + \beta_{(i)j}, \sigma^2 + \sigma_a^2)$$

Los valores esperados de las medias cuadráticas se resumen en la tabla 7.7

Media Cuadrática	Valor estimado
Factor A	$\sigma^2 + bn\sigma_a^2$
Factor B	$\sigma^2 + n\sigma_a^2 + \frac{n}{a(b-1)} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \beta_{(i)j}^2$
Error	σ^2

Tabla 7.7: Valores esperados

Los estimadores de las componentes de la varianza se expresan como:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}^2 &= MS_E \\ \widehat{\sigma}_b^2 &= \frac{MS_A - MS_E}{bn} \\ \widehat{\alpha}_i &= \overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} \end{aligned}$$

El contraste de hipótesis a cerca del efecto del factor A está expresado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_a^2 = 0 \\ H_1 &: \sigma_a^2 \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba se expresa como:

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_A} \sim F_{(a-1),a(b-1)}$$

bajo la hipótesis nula. Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste asociado a la existencia de efectos de los niveles del factor A, será:

$$\text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A \leq F_{\alpha,(a-1),(b-1)a}$$
$$\text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A > F_{\alpha,(a-1),(b-1)a}$$

Lo cual equivale en términos del $p - valor$, aceptar H_0 si $p - valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

El contraste de hipótesis a cerca del efecto del factor B está expresado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_{(i)j} = 0 \;\; j = 1, 2, \cdots, b \\ H_1 &: \text{algún } \beta_{(i)j} \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba se expresa como:

$$F_B = \frac{MS_{(A)B}}{MS_E} \sim F_{a(b-1),ab(N-1)}$$

bajo la hipótesis nula. Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste relativo a la existencia de una componente asociada al efecto del factor B, será:

$$\text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B \leq F_{\alpha,a(b-1),(N-1)ab}$$
$$\text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_B > F_{\alpha,a(b-1),(N-1)ab}$$

Lo cual equivale en términos del $p - valor$, aceptar H_0 si $p - valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

7.3. Diseños cruzado-anidados

Se dice que dos factores están completamente cruzados cuando aparecen todas las posibles combinaciones de los niveles de cada factor, como es el caso de un diseño bifactorial.

Se dice que dos factores están cruzados cuando ninguno de ellos está anidado en el otro, es decir, ni $A \subset B$ ni $B \subset A$.

Los diseños cruzado-anidados se caracterizan por tener tanto factores cruzados como anidados. No existe un único modelo matemático, ya que depende de la disposición de los factores en el diseño. Se considerarán algunos modelos de interés de diseños cruzados-anidados.

7.3.1. Modelo I

Consideremos un diseño experimental en el cual todos los niveles de un factor P se cruzan con los niveles de un factor T y un factor I posee niveles distintos para cada uno de los cruces, bajo el esquema $P * T$ y $I \subset (P * T)$. En el modelo se deben incluir :

- Los efectos principales de P y T.
- Las interacciones entre P y T.
- Los efectos de cada nivel k del factor I anidado en la combinación de (i, j).

El modelo matemático se expresa como:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_{k(ij)} + \varepsilon_{ijkl}$$

Cuando: $i = 1, 2, \cdots, a \quad j = 1, 2, \cdots, b \quad k = 1, 2, \cdots, c \quad i = 1, 2, \cdots, n$, sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=i}^{b} \beta_j = \sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$\forall(ij)$ fijo $\sum_{k=1}^{c} \gamma_{k(ij)} = 0$ ya que el factor I posee c niveles anidados en cada combinación de los niveles de P y T.

Al aplicar mínimos cuadrados ordinarios, se puede estimar cada uno de los parámetros del modelo, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu} &= \overline{Y}_{....}, \quad \widehat{\alpha}_i = \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{....}, \quad \widehat{\beta}_j = \overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{....} \\ \widehat{(\alpha\beta)}_{ij} &= \overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{....}, \quad \widehat{\gamma}_{k(ij)} = \overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{ij..} \quad \forall(i,j,k) \text{ fijo} \end{aligned}$$

Las sumas de cuadrados y sus grados de libertad son:

Sumas de cuadrados	**Gl.**
$SC_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl} - \overline{y}_{....})^2$	$abcn - 1$
$SC_A = bcn\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{i...} - \overline{y}_{....})^2$	$a - 1$
$SC_B = acn\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{.j..} - \overline{y}_{....})^2$	$b - 1$
$SC_{AB} = cn\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{y}_{ij..} - \overline{y}_{i...} - \overline{y}_{.j..} + \overline{y}_{....})^2$	(a-1)(b-1)
$SC_{C(AB)} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\overline{y}_{ijk.} - \overline{y}_{ij..})^2$	$ab(c-1)$
$SC_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n}(\overline{y}_{ijkl} - \overline{y}_{ijk.})^2$	$abc(n-1)$

La tabla de ANOVA para este modelo se expresa como:

Fuente de variación	Sumas de cuadrados	GL.	Medias cuadráticas	F
Factor A	SC_A	$a-1$	$\frac{SC_A}{a-1}$	$\frac{MC_A}{MC_E}$
Factor B	SC_B	$b-1$	$\frac{SC_B}{b-1}$	$\frac{MC_B}{MC_E}$
Factor $A*B$	SC_{AB}	$(a-1)(b-1)$	$\frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{MC_{AB}}{MC_E}$
Factor C	$SC_{C(AB)}$	$ab(c-1)$	$\frac{SC_{C(AB)}}{ab(c-1)}$	$\frac{MC_{C(AB)}}{MC_E}$
Residual	SC_E	$abc(n-1)$	$\frac{SC_E}{abc(n-1}$	
Total	SC_T	$abcn-1$		

Tabla 7.8: ANOVA cruzado-anidado: Modelo I

Los contrastes de hipótesis asociados a este tipo de diseños son:

Contraste para los α_i

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Contraste para los β_j

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_j = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Contraste para los $(\alpha\beta)_{ij}$

$$\begin{aligned} H_0 &: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Contraste para los $\gamma_{k(ij)}$

$$\begin{aligned} H_0 &: \gamma_{k(ij)} = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

La regla de decisión se construye de manera similar a las antes estudiadas:

- Si $F_A > F_{a-1,abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : \alpha_i = 0$ al nivel de confianza α.
- Si $F_B > F_{b-1,abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : \beta_j = 0$ al nivel de confianza α.

- Si $F_{AB} > F_{(a-1)(b-1),abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$ al nivel de confianza α.
- Si $F_{C(AB)} > F_{ab(c-1),abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : \gamma_{k(ij)} = 0$ al nivel de confianza α.

7.3.2. Modelo II

En este diseño experimentales observa un factor C que no está anidado en el cruce de los restantes factores A y B, sólo se anida en el factor A, además se considerarán las interacciones de C con B y de B con A. El modelo matemático se expresa como:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_{k(i)} + (\gamma\beta)_{k(i)j} + \varepsilon_{ijkl}$$

Cuando: $i = 1, 2, \cdots, a \quad j = 1, 2, \cdots, b \quad k = 1, 2, \cdots, c \quad i = 1, 2, \cdots, n$, sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=i}^{b} \beta_j = \sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$\forall i \text{ fijo } \sum_{k=1}^{c} \gamma_{k(i)} = \sum_{k=1}^{c} (\gamma\beta)_{k(i)j} = \sum_{j=1}^{b} (\gamma\beta)_{k(i)j} = 0$$

Al aplicar mínimos cuadrados ordinarios, se puede estimar cada uno de los parámetros del modelo, obteniéndose:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= \overline{Y}_{....} \\
\widehat{\alpha}_i &= \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{....} \\
\widehat{\beta}_j &= \overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{....} \\
\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} &= \overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{....} \\
\widehat{\gamma}_{k(i)} &= \overline{Y}_{i.k.} - \overline{Y}_{i...} \\
\widehat{\gamma}_{k(i)} &= \overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i.k.} + \overline{Y}_{i...} \quad \forall (i,j,k) \text{ fijo}
\end{aligned}$$

Las sumas de cuadrados y sus grados de libertad son:

La tabla de ANOVA para este modelo se expresa como:
Los contrastes de hipótesis asociados a este tipo de diseños son:

Sumas de cuadrados	**Gl.**
$SC_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl} - \overline{y}_{....})^2$	$abcn-1$
$SC_A = bcn\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{i...} - \overline{y}_{....})^2$	$a-1$
$SC_B = acn\sum_{i=1}^{a}(\overline{y}_{.j..} - \overline{y}_{....})^2$	$b-1$
$SC_{AB} = cn\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{y}_{ij..} - \overline{y}_{i...} - \overline{y}_{.j..} + \overline{y}_{....})^2$	(a-1)(b-1)
$SC_{C(A)} = bn\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(\overline{y}_{i.k.} - \overline{y}_{i...})^2$	$a(c-1)$
$SC_{BC(A)} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\overline{y}_{ijk.} - \overline{y}_{ij..} - \overline{y}_{i.k.} + \overline{y}_{i...})^2$	$a(b-1)(c-1)$
$SC_{BC(A)} = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\overline{y}_{ijk.} - \overline{y}_{ij..} - \overline{y}_{i.k.} + \overline{y}_{i...})^2$	$a(b-1)(c-1)$
$SC_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{l=1}^{n}(\overline{y}_{ijkl} - \overline{y}_{ijk.})^2$	$abc(n-1)$

Contraste para los α_i

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Contraste para los β_j

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_j = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Contraste para los $(\alpha\beta)_{ij}$

$$\begin{aligned} H_0 &: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Contraste para los $\gamma_{k(ij)}$

$$\begin{aligned} H_0 &: \gamma_{k(ij)} = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

La regla de decisión se construye de manera similar a las antes estudiadas:

- Si $F_A > F_{a-1,abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : \alpha_i = 0$ al nivel de confianza α.
- Si $F_B > F_{b-1,abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : \beta_j = 0$ al nivel de confianza α.
- Si $F_{AB} > F_{(a-1)(b-1),abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$ al nivel de confianza α.
- Si $F_{C(A)} > F_{a(c-1),abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : \gamma_{k(i)} = 0$ al nivel de confianza α.
- Si $F_{BC(A)} > F_{a(b-1)(c-1),abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : (\gamma\beta)_{k(i)j} = 0$ al nivel de confianza α.

Fuente de variación	Sumas de cuadrados	GL.	Medias cuadráticas	F
Factor A	SC_A	$a-1$	$\frac{SC_A}{a-1}$	$\frac{MC_A}{MC_E}$
Factor B	SC_B	$b-1$	$\frac{SC_B}{b-1}$	$\frac{MC_B}{MC_E}$
Factor $A*B$	SC_{AB}	$(a-1)(b-1)$	$\frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{MC_{AB}}{MC_E}$
Factor $C(A)$	$SC_{C(A)}$	$a(c-1)$	$\frac{SC_{C(A)}}{a(c-1)}$	$\frac{MC_{C(A)}}{MC_E}$
Factor $BC(A)$	$SC_{BC(A)}$	$a(b-1)(c-1)$	$\frac{SC_{C(A)}}{a(b-1)(c-1)}$	$\frac{MC_{BC(A)}}{MC_E}$
Residual	SC_E	$abc(n-1)$	$\frac{SC_E}{abc(n-1}$	
Total	SC_T	$abcn-1$		

Tabla 7.9: ANOVA cruzado-anidado: Modelo II

7.3.3. Modelo III: modelos con efectos mixtos

En este modelo de diseños se tienen tres factores A, B y C tales que:

- $C \subset B * A$.
- A y B son factores fijos.
- C es un factor aleatorio.

Expresado mediante el modelo matemático:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_{k(ij)} + \varepsilon_{ijkl}$$

Cuando: $i = 1, 2, \cdots, a \quad j = 1, 2, \cdots, b \quad k = 1, 2, \cdots, c \quad i = 1, 2, \cdots, n$, sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = \sum_{j=i}^{b} \beta_j = \sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{b} (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$\forall(ij)$ fijo $\gamma_{k(ij)} \sim N(0, \sigma^2_\gamma)$, además $\varepsilon_{ijkl} \sim N(0, \sigma^2)$ independientes entre sí.

Al aplicar mínimos cuadrados ordinarios, se puede estimar cada uno de los parámetros del modelo, obteniéndose:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= \overline{Y}_{....} \\
\widehat{\alpha}_i &= \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{....} \\
\widehat{\beta}_j &= \overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{....} \\
\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} &= \overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{....} \\
\widehat{\gamma}_{k(ij)} &= \overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{ij..} \quad \forall(i,j,k) \text{ fijo}
\end{aligned}$$

La tabla de ANOVA para este modelo se expresa como:

Fuente de variación	Sumas de cuadrados	GL.	Medias cuadráticas	F
Factor A	SC_A	$a-1$	MC_A	$\frac{MC_A}{MC_{AB}}$
Factor B	SC_B	$b-1$	MC_B	$\frac{MC_B}{MC_{AB}}$
Factor $A*B$	SC_{AB}	$(a-1)(b-1)$	MC_{AB}	$\frac{MC_{AB}}{MC_{AB}}$
Factor C	$SC_{C(AB)}$	$ab(c-1)$	$MC_{C(AB)}$	$\frac{MC_{C(AB)}}{MC_E}$
Residual	SC_E	$abc(n-1)$	MC_E	
Total	SC_T	$abcn-1$		

Tabla 7.10: ANOVA cruzado-anidado: Modelo III

Los valores esperados para las medias cuadráticos se resumen en la tabla

Media cuadrática	Valor esperado
MC_A	$\sigma^2 + n\sigma^2_\gamma + \frac{bcn}{a-1}\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2$
MC_B	$\sigma^2 + n\sigma^2_\gamma + \frac{acn}{b-1}\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2$
MC_{AB}	$\sigma^2 + n\sigma^2_\gamma + \frac{cn}{(b-1)(a-1)}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\alpha\beta)_{ij}^2$
$MC_{C(AB)}$	$\sigma^2 + n\sigma^2_\gamma$
MC_E	σ^2

Tabla 7.11: Valores esperados

Mientras que los componentes de la varianza estimados para el modelo en cuestión son:

$$\widehat{\sigma}^2 = MC_E,\ \ \widehat{\sigma}^2_\gamma = \frac{MC_{C(AB)} - MC_E}{n}$$

Los contrastes de hipótesis asociados a este tipo de diseños son:

Contraste para los α_i

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_i = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Contraste para los β_j

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_j = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Contraste para los $(\alpha\beta)_{ij}$

$$\begin{aligned} H_0 &: (\alpha\beta)_{ij} = 0 \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Contraste para los $\sigma^2_{\gamma)}$

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2_\gamma = 0 \\ H_1 &: \sigma^2_\gamma \neq 0 \end{aligned}$$

La regla de decisión se construye de manera similar a las antes estudiadas:

- Si $F_A > F_{a-1,abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : \alpha_i = 0$ al nivel de confianza α.
- Si $F_B > F_{b-1,abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : \beta_j = 0$ al nivel de confianza α.
- Si $F_{AB} > F_{(a-1)(b-1),abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$ al nivel de confianza α.
- Si $F_{C(AB)} > F_{a(c-1),abc(n-1),\alpha}$ se rechaza $H_0 : \sigma^2_\gamma = 0$ al nivel de confianza α.

7.4. Uso del SPSS

Los diseños jerárquicos se analizan mediante el SPSS utilizándoos los campos ejecutados al considerar los diseños factoriales, salvo que este tipo de diseños no están definidos de manera explícita, en la caja de diálogo principal de los modelos factoriales.

La secuencia de comandos utilizada en este caso es:

```
Analizar -->  Modelo Lineal General --> Univariado
```

Dentro de la caja de diálogo asociada se seleccionan los siguientes campos:

```
Dependiente: Respuesta
Efectos fijos: Factor A
Efectos aleatorios: Factor B
Modelo:
   Especificar Modelo: Personalizado
               Modelo:Factor A
              Construir términos: efectos principales
       Continuar
```

```
Opciones:
     Mostrar las medias para: Factor A Factor B
     Continuar
Pegar
```

La ejecución del campo *Pegar*, permite activar la ventana de sintaxis asociada al ANOVA con medidas anidadas, que se ilustra a continuación

```
UNIANOVA
    RESPUESTA  A BY  B
       /RANDOM = Factor A
       /METHOD = SSTYPE(III)
       /INTERCEPT = INCLUDE
       /EMMEANS = TABLES(Factor A)
       /EMMEANS = TABLES(Factor B)
       /EMMEANS = TABLES(OVERALL)
       /CRITERIA = ALPHA(.05)
       /DESIGN = Factor A Factor B(Factor A).
   Ejecutar: Todo
```

7.5. Solución de problemas

Problema 7.1 *Se sospecha que, dependiendo de si la escuela es pública o privada, las calificaciones de comprención lectora son distintas. Para comprobarlo, de cada tipo de centros educativos se eligen cuatro escuelas. Dentro de cada escuela se selecciona, aleatoriamente una muestra de 10 niños a los cuales se les somete a una lectura y son evaluados. Si consideramos, por un lado, los dos tipos de centros educativos, como los niveles de un factor denominado* Centro*, de efectos fijos, y por otro lado, las cuatro escuelas pueden ser considerados como otro factor, denominado* Escuelas *de efectos aleatorios anidados, la información resumida en la tabla siguiente, será útil para comparar las calificaciones de los niños en cada centro educativo.*

Escuela 1		Escuela 2		Escuela 3		Escuela 4	
S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2	S_1	S_2
10	12	13	15	15	14	15	17
15	15	17	16	18	16	18	15
17	16	18	19	15	18	13	18
16	15	14	18	13	13	17	12
18	15	10	18	7	15	16	18
16	18	14	12	16	18	20	16
13	10	11	16	13	16	9	11
16	18	12	14	13	10	11	14
17	13	18	19	10	9	20	18
15	8	15	10	17	18	9	18

Donde S_1 es el sector Público y S_2 es el sector privado. A partir de la información contenida en la tabla serán definidas tres variables: *Calificación* que resume las puntuaciones de cada uno de los 80 alumnos a los cuales se les aplicaron las evaluaciones, *Centro* que contiene información asociada al tipo de centro educativo, con valores 1 para escuelas Públicas, 2 para escuelas Privadas. Finalmente la variable *Escuela*, con valores 1, 2, 3 y 4 identificadores de las cuatro escuelas seleccionadas aleatoriamente en cada sector.

La secuencia de comandos utilizada en este caso es:

```
Analizar -->  Modelo Lineal General --> Univariado
```

Dentro de la caja de diálogo asociada se seleccionan los siguientes campos:

```
Dependiente: Calificación
Efectos fijos: Centro
Efectos aleatorios: Escuela
Modelo:
   Especificar Modelo: Personalizado
               Modelo: Centro
              Construir términos: efectos principales
       Continuar
Opciones:
  Mostrar las medias para: Centro, Escuela, Centro*Escuela
     Continuar
Pegar
```

La ejecución del campo *Pegar*, permite ejecutar la ventana de sintaxis asociada al ANOVA con medidas anidadas, que se ilustra a continuación

```
UNIANOVA
    Calificación  BY Centro Escuela
       /RANDOM = Escuela
       /METHOD = SSTYPE(3)
       /INTERCEPT = INCLUDE
       /EMMEANS = TABLES(Centro)
       /EMMEANS = TABLES(Escuela)
       /EMMEANS = TABLES(Centro*Escuela)
       /EMMEANS = TABLES(OVERALL)
       /CRITERIA = ALPHA(.05)
       /DESIGN = Centro Escuela(centro).
   Ejecutar: Todo
```

La sintaxis anterior es necesaria ya que, el SPSS no posee campos específicos para los modelos ANOVA anidados. Como reporte de la sintaxis el SPSS, genera un conjunto de tablas que se leerán a continuación.

		Etiqueta	*N*
Centro			
	1	Público	40
	2	Privado	40
Escuela			
	1	Primera escuela	20
	3	Tercera escuela	20
	4	Cuarta escuela	20

Tabla 7.12: Factores inter-sujetos

La tabla **Factores inter-sujetos** reporta las etiquetas y el número de casos en cada grupo definido por los niveles de los factores: reporta los dos niveles del factor Centro, público y privado, el número de casos en cada grupo 40 individuos, de igual manera reporta los cuatro grupos definidos por el factor escuela, primera, segunda, tercera y cuarta escuela, con 20 individuos en cada grupo.

La siguiente tabla **Medias: centro** reporta los valores estimados de los dos tipos de centros educativos: escuelas públicas y privadas, sus valores son muy semejantes, lo cual induce a pensar que no existen diferencias significativas entre ellos. En el grupo de escuelas del sector público se estimó el valor promedio de las calificaciones igual a 14.50, mientras que en las escuelas del sector privado, el promedio de calificaciones fue de 15.025, la diferencia entre los valores muestrales es de 0,525, la cual aparentemente no es significati-

va, para obtener conclusiones precisas al respecto es necesario efectuar el contraste de hipóteis adecuado.

			I.C al 95 %		
Centro	Media	Error	Inferior	Superior	
Público	14.500	0.496	13.512	15.488	
Privado	15.025	0.496	14.037	16.013	

Tabla 7.13: Medias: Centro

La tabla **Pruebas de efectos inter-sujetos**, reporta la suma de cuadrados, los grados de libertad, las medias cuadráticas, los estadísticos F y el $p-valor$ asociado a los diferentes contrastes de hipótesis de interés en modelos ANOVA anidados.

Fuente		SS	G.L.	MC	F	sig.
Intersección	Hipótesis	17434.51	1	17434.51	2965.47	0.000
	Error	35.28	6	5.88		
Centro	Hipótesis	5.51	1	5.51	0.94	0.370
	Error	35.28	6	5.88		
Escuela(Centro)	Hipótesis	35.28	6	5.88	0.60	0.731
	Error	707.70	72	9.83		

Tabla 7.14: Prueba de efectos inter-sujetos

El primer contraste de interés está relacionado a la existencia de un efecto significativo en el promedio de calificaciones entre los tipos de centros educativos, definido como:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

El $p-valor$ asociado al contraste es igual a 0.370, mayor que $\alpha = 5\,\%$, es decir, los niveles del factor centro, no aportan efectos significativos sobre el promedio de la variable dependiente en los dos grupos en estudio.

El contraste asociado a la existencia de efectos significativos creados por los niveles del factor Escuela dentro del los niveles del factor centro, está definido mediante:

$$H_0 : \sigma_b^2 = 0$$
$$H_1 : \sigma_b^2 > 0$$

El $p-valor$ asociado al contraste es igual a 0.731, mayor que $\alpha = 5\,\%$, en conclusión no existen diferencias significativas en los promedios de las calificaciones de las escuelas dentro de los grupos definidos por el factor centro. En conclusión, cualquier diferencia en los promedios de las calificaciones son producto del azar y no como efecto de los niveles del factor escuela anidada dentro de los niveles del factor centro.

Problema 7.2 *En un estudio se quiere comparar cuatro métodos de análisis congnositivos en terapia psicológica, para lo cual se consideran doce consultorios psicológicos. El estudio se realiza de forma que se aplica cada método de análisis a tres consultorios diferentes. En cada consultorio se aplica el método de análisis en la sección de terapia psicológica a dos pacientes, y al final de la sección se anota la puntuación terapéutica de cada paciente. Esta puntuación está en un rango de 0 a 10 puntos de efectividad. Los datos obtenidos en el experimento se presentan en la siguiente tabla:*

	Método											
	1			2			3			4		
Consultorio	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Puntuación	8	9	5	9	9	8	9	5	5	2	4	6
	6	7	6	10	8	7	8	6	5	3	6	5

Tabla 7.15: Puntuaciones

1. *Formular el modelo matemático asociado al diseño experimental, e identificar cada uno de los elementos que intervienen en el estudio*
2. *Construir la tabla de ANOVA. ¿Qué se puede decir de los distintos métodos de análisis para la terapia psicológica?. ¿Se puede afirmar que los métodos 1 y 3 son más eficientes, aplicar el método de Tukey?*
3. *¿Existen diferencias entre las eficiencias medias de unos consultores a otros?. ¿Se puede afirmar que la eficacia media es la misma en los consultorios que utilizan un mismo método?*
4. *Analizar el problema en el caso de que los consultorios psicológicos se hayan elegidos aleatoriamente.*
   a) *¿Qué se puede decir en esta situación de los métodos de análisis?. ¿Y de los consultorios?. ¿La eficiencia media de los métodos en los consultorios es la misma?*
   b) *¿De qué factores depende la puntuación terapéutica?. Estimar la varianza de la puntuación terapéutica.*

Según la información aportada por el investigador, el modelo matemático, que explica el diseño planteado, es de la forma:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$$

La variable respuesta y_{ijk} representa la puntuación terapéutica del paciente k en el consultorio j con el método i. Los factores del modelo son: en primer lugar se tiene el factor definido por los métodos, con cuatro niveles. En cada método se considera anidado el factor consultorio con tres niveles distintos en cada método. Luego los tratamientos son cada uno de los consultorios que trabajan con un mismo método, es decir, doce tratamientos. Las unidades experimentales son cada uno de los pacientes atendidos en el consultorio psicológico con un método de análisis, en total 24 pacientes.

Los términos del modelo matemático son: μ es la media poblacional de la variable respuesta, α_i es el efecto medio adicional debido al método i; $\beta_{j(i)}$ es el efecto medio adicional debido al consultorio j y al método i, finalmente, ε_{ijk} es el término aleatorio del modelo lineal, bajo los supuestos:

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0 \quad \forall i \quad \sum_{j=1}^{3} \beta_{j(i)} = 0 \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes}$$

Para construir la tabla ANOVA deseada, es necesario ejecutar la siguiente secuencia de sintaxis:

```
UNIANOVA Puntuación BY Método Consultorio
  /METHOD=SSTYPE(3)
  /INTERCEPT=INCLUDE
  /POSTHOC=Metodo(TUKEY)
  /EMMEANS=TABLES(Método)
  /EMMEANS=TABLES(Consultorio)
  /EMMEANS=TABLES(Metodo*Consultorio)
  /CRITERIA=ALPHA(.05)
  /DESIGN=Metodo Consultorio (Método).
```

La primera tabla reportada la tabla de factores inter-sujetos (ver tabla 7.16), el factor métodos con 4 niveles y 6 observaciones por nivel, mientras que, el factor consultorio presenta 3 niveles y 8 observaciones por nivel.

La tabla 7.17 reporta la prueba de efectos inter-sujetos. Para analizar los métodos empleados en los consultorios, observamos la tercera fila de la tabla y contrastamos si los métodos de análisis presentan diferencias en las puntuaciones de las secciones del paciente.

		N
Método	1	6
	2	6
	3	6
	4	6
Consultorio	1	8
	3	8
	3	8

Tabla 7.16: Factores inter-sujetos

Fuente	Sumas	GL	Medias	F	Sig
Modelo corregido	88.000a	11	8.000	9.600	.000
Intersección	1014.000	1	1014.000	1216.800	.000
Método	53.000	3	17.667	21.200	.000
Consultorio(método)	35.000	8	4.375	5.250	.005
Error	10.000	12	.833		
Total	1112.000	24			
Total corregido	98.000	23			

a. R cuadrado = .898 (R cuadrado corregida = .804)

Tabla 7.17: Prueba efectos inter-sujetos

Como el $p - valor$ asociado al contraste es igual a 0.000 menor a $\alpha = 5\,\%$, entonces se concluye que es distinta la puntuación de cada paciente según el método de análisis. La tabla 7.18 contiene la información asociada al contraste de comparaciones múltiples entre los métodos empleados.

El método 1 presenta diferencias significativas al nivel del 5 % con los métodos 2 y 4, mientras que es similar al método 3. El método 2 presenta diferencias significativas con los métodos restantes, además las diferencias de medias son todas positivas, indicador de ser más eficiente que los métodos restantes.

Por su parte el método 4 presenta diferencias con los tres métodos considerados, pero las diferencias de media son todas negativas, lo cual refleja ser el método menos eficientes en las técnicas de análisis.

Las relaciones de eficiencia de los métodos de análisis aplicados en el ensayo, son corroboradas en la tabla que determina la formación de subgrupos en función de la prueba de Tukey.

En conclusión los métodos de análisis no se comportan de manera análoga respecto a la puntuación terapéuticas de cada paciente, el método 2 es el más eficientes el sentido que con él se observa una mayor puntucaión de los

					IC al 95 %	
					Límite	Límite
Método I	Método J	diferencias	Error	Sig.	Inferior	Superior
1	2	-1.67*	.527	.036	-3.23	-.10
	3	.50	.527	.780	-1.06	2.06
	4	2.50*	.527	.002	.94	4.06
2	1	1.67*	.527	.036	.10	3.23
	3	2.17*	.527	.007	.60	3.73
	4	4.17*	.527	.000	2.60	5.73
3	1	-.50	.527	.780	-2.06	1.06
	2	-2.17*	.527	.007	-3.73	-.60
	4	2.00*	.527	.012	.44	3.56
4	1	-2.50**	.527	.002	-4.06	-.94
	2	-4.17	.527	.000	-5.73	-2.60
	3	-2.00*	.527	.012	-3.56	-.44

Tabla 7.18: Método: comparaciones múltiples

		Subconjuntos		
Método	N	1	2	3
4	6	4.33		
3	6		6.33	
1	6		6.83	
2	6			8.50
Sig.		1.000	.780	1.000

Tabla 7.19:

pacientes. El método 4 posee las menores puntuaciones de los pacientes, los métodos 1 y 3 son similares.

Para establecer la existencia de diferencias entre las eficiencias medias de los consultorios unos a otros, es necesario observar el $p-valor$ del contraste de hipótesis asociado a consultorios(métodos) en la tabla 7.17. El cual es igual a 0.005, inferior a $\alpha = 5\,\%$, en conclusión existen diferencias en las puntuaciones terapéuticas de los pacientes según el consultorio al que acuden.

Por otra parte, para analizar estas diferencias método a método es necesario observar la tabla siguiente:

Los consultorios al emplear el método 3 y 4 presentan distintas eficiencias, el método 3 es más que los restantes métodos, ya que el $p-valor$ del contraste es menor que 0.05. Los métodos 1 y 2 presentan eficiencias similares en los diferentes consultorios por presentar $p-valor$ superior a 0.05.

Contraste	Sumas	GL.	Medias	F	sig.
Consultorio*Método 1	6.33	2	3.167	3.80	0.053
Consultorio*Método 2	4.00	2	2.00	2.40	0.133
Consultorio*Método 3	14.33	2	7.17	8.60	0.005
Consultorio*Método 4	10.33	2	5.167	6.20	0.014

Tabla 7.20: Comparaciones Consultorio*Métodos

Para analizar el diseño en el caso en que los consultorios psicológicos se hayan seleccionado al azar, es necesario modificar el modelo matemático planteado, en nuestro caso la modificación es:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$$

bajo los supuestos:

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 0 \quad \forall i \;\; \beta_{j(i)} \sim N(0, \sigma_\beta^2) \quad \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes}$$

Las secuencia de sintaxis asociada al modelo es:

```
UNIANOVA Puntuación BY Método Consultorio
  /RANDOM=Consultorio
  /METHOD=SSTYPE(3)
  /INTERCEPT=INCLUDE
  /POSTHOC=Metodo(TUKEY)
  /CRITERIA=ALPHA(0.05)
  /DESIGN=Metodo Consultorio (Método).
```

El reporte de la ejecución del archivo de sintaxis anterior, consta de dos tablas. La tabla 7.21 contiene la información completa acerca del contraste de los efectos inter-sujetos. El $p - valor$ del contraste sobre la existencia de diferencias entre las puntuaciones medias con los distintos métodos es igual a 0.051 superior al nivel de significancia del 5 %, se acepta que no hay diferencias en las puntuaciones terpéuticas con los distintos métodos.

Para analizar la posible influencia de los consultorios, observamos el $p - valor$ de la línea *Consultorio(Método)* que contrasta si es nula la varianza de la puntuaciones de los pacientes los consultorios con un mismo método; se concluye que la puntuación de los pacientes en los consultorios con un mismo método varía de un consultorio a otro.

En la tabla 7.22 se resumen los componentes de la varianza de las puntuaciones asociadas a los efectos de un consultorio a otro.

Fuente		Sumas	GL.	Medias	F	Sig.
Intersección	Hipótesis	1014.00	1	1014.00	231.771	.000
	Error	35.00	8	4.375		
Método	Hipótesis	53.00	3	17.667	4.038	.051
	Error	35.000	8	4.375		
Consultorio(Método)	Hipótesis	35.00	8	4.375	5.250	.005
	Error	10.00	12	.833		

Tabla 7.21: Efectos inter-sujetos

	Componentes de la varianza		
	Var(Consul*Méto)	Var(Error)	Término cuadrático
Intersección	2.000	1.000	Intersección
			Método
Método	2.000	1.000	Método
Consultorio*Método	2.000	1.000	
Error	.000	1.000	

Tabla 7.22: Componentes de la varianza

No tiene sentido afirmar que la eficiencia media de los análisis en los consultorios es la misma, ya que se considera los consultorios correspondientes a un mismo método de análisis como una variable aleatoria.

La puntuación terapéutica no se ve afectada por el método, pero si en su variabilidad por los consultorios con cada método. Una estimación de la variabilidad es:

$$\sqrt{2{,}00} = 1{,}4142 \text{ días}$$

el error estándar es igual a

$$\sqrt{2{,}00 + 1{,}00} = 1{,}732 \text{ días}$$

Capítulo 8

Diseños con medidas repetidas

8.1. Preliminares

Dado un conjunto de variables independientes cuantitativas, donde se supone que los valores de las distintas variables son comparable, por ejemplos, los resultados de la aplicación, en distintos instantes de tiempo de un mismo tipo de tratamiento o resultados de la aplicación de distintos programas de entrenamiento o diseños instruccionales; *el análisis de la varianza de medidas repetidas* consiste en comparar el comportamiento de las distintas variables del conjunto. Este tipo de análisis puede realizarse sobre un único grupo de individuos o sobre dos o más grupos.

Los modelos de diseños con medidas repetidas sirven para estudiar el efecto de uno o más factores cuando al menos uno de ellos es un factor *intra-sujetos*. En los diseños con factores *inter-sujetos o completamente aleatorizados*, a cada nivel del factor se le asigna o le corresponde un grupo diferente de sujetos. Por el contrario, los diseños con un factor *intra-sujetos o con medidas repetidas*, se caracterizan porque todos los niveles del factor se aplican a los mismos sujetos.

El diseño más simple de medidas repetidas consiste en medir dos variables en una misma muestra de sujetos, los datos generados en este diseño son analizados mediante *una prueba t para muestras relacionadas*. Pero, en general los diseños con medias repetidas tienen más de dos medidas y más de un factor.

Supongamos un diseño de estudio de mercado, con el fin de conocer la opinión de los consumidores acerca cinco producto alternativos o rivales comer-

ciales, se pueden seleccionar cinco grupos de sujetos y solicitar la opinión de cada grupo sobre un solo producto. Así, en este diseño se tiene un factor asociado a los producto con cinco niveles y tantos grupos de observación como niveles del factor, el modelo que permite analizar los datos es un ANOVA de un factor.

Pero, podemos seleccionar un único grupo de individuos y pedirles que expresen su preferencia por cada uno de los cinco productos rivales. En esta situación se sigue teniendo un factor con cinco niveles, tipo de productos, con un solo grupo de sujetos, que hacemos pasar por las cinco condiciones definidas por los niveles del factor, es decir, todos los sujetos opinan sobre todos los productos. Para analizar los datos de este tipo de diseño se aplica un Diseños con medidas repetidas.

Las ventajas de los Diseños con medidas repetidas son evidentes:

- Se requiere menos sujetos que en un diseño completamente aleatorizado.
- Permite eliminar la variabilidad residual debida a las diferencias entre los sujetos.

Como contrapartida, es necesario vigilar algunos efectos atribuibles precisamente a utilizar los mismos sujetos, tales como *el efecto de arrastre*, que ocurre cuando se administra una condición antes que aya finalizado el efecto de otra administrada anteriormente, o el efecto del *aprendizaje por la práctica* que ocurre cuando las respuestas de los sujetos pueden mejorar con la repetición y, como consecuencia de ello, los tratamientos aplicados en último lugar parecen más efectivos que los aplicados al inicio, sin que hayan diferencias entre ellos, en tal caso es necesario controlar el orden de la presentación de las condiciones. Obviamente es conveniente conocer las ventajas e inconvenientes de este tipo de diseños para decidir cuando es apropiado usarlos. El diseño de medidas repetidas implica el registro de la variable dependiente bajo diversas condiciones. En un contexto manipulable, estas condiciones pueden ser diferentes tratamientos experimentales u ocasiones de medidas antes, durante o después de la intervención. En un contexto no manipulativo, las medidas se registran en distintos intervalos temporales. Cuando el factor tiempo es una variable de interés, el diseño se concibe como longitudinal.

El diseño de medidas repetidas multimuestra (diseño $A \times B$ con medidas repetidas en B) introduce además un factor intersujetos, de agrupamiento, de forma que la variable dependiente se registra en todos los sujetos bajo todas las condiciones del factor de medidas repetidas, pero sólo bajo un nivel del factor intersujetos. Cuando el diseño es no longitudinal suele ser más

fácil conseguir que el diseño sea balanceado, incluyendo el mismo número de sujetos por grupo, que en los longitudinales, ya que en éstos se produce con más frecuencia pérdidas de sujetos a lo largo de los distintos puntos temporales.

El análisis de varianza (ANOVA) mixto univariado es el más usado en el análisis de los diseños de medidas repetidas, asumiendo que el factor intersujetos es fijo y los sujetos aleatorios; éste requiere satisfacer los supuestos de normalidad, independencia y esfericidad. El primero requiere que las observaciones de cada unidad de análisis sean extraídas de una población con distribución normal multivariada, el segundo supone la independencia entre las observaciones correspondientes a los distintos sujetos y el tercero implica la igualdad de varianzas de las diferencias entre los tratamientos, es decir, la matriz de covarianzas debe tener igual varianza de las diferencias entre todos los pares de puntuaciones.

En el caso multimuestra, para comprobar los efectos del factor de medidas repetidas y su interacción con el factor intersujetos se debe satisfacer lo que se denomina esfericidad multimuestra; ésta implica, por un lado, la homogeneidad de las matrices de covarianzas o igualdad de las matrices dentro de cada nivel del factor intersujetos y, por otro, esfericidad en la matriz de covarianzas común. Es decir, debe haber esfericidad para todos los niveles del factor de medidas repetidas dentro de cada nivel del factor intersujetos. Cuando los supuestos del modelo univariado se satisfacen, el ANOVA mixto proporciona una prueba adecuada para comprobar los efectos del diseño en todas las variaciones de los diseños. Sin embargo, en la investigación psicológica es frecuente la violación de la esfericidad, sobre todo cuando los datos son longitudinales. Una violación típica de la esfericidad ocurre en los estudios relativos a la Psicología del Desarrollo en los que el tiempo representa la variable independiente. Cuando la variable dependiente se mide repetidamente en diferentes puntos temporales puede suceder que las correlaciones entre los pares de puntuaciones cercanas en el tiempo sean mayores que entre las lejanas, disminuyendo según las medidas se alejen en la serie. Estas diferencias en las correlaciones conducen a desigualdad en las varianzas de las diferencias.

8.2. Prueba de Mauchly

Huynh y Feldt (1979) mostraron que las condiciones necesarias en el análisis de la varianza usual en los diseños con medidas repetidas eran menos estrictas que la condición de simetrıá completa. Demostraron que la condición necesaria es tener la misma varianza para las diferencias de todos los pares

posibles de observaciones tomadas en diferentes periodos, por ejemplo, en los tiempos $i \neq j$,

$$\sigma^2_{X_i - Xj} = 2\lambda \tag{8.1}$$

para algún $\lambda > 0$. Esta condición también puede escribirse como:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \sigma_j^2) - \lambda \tag{8.2}$$

La matriz de varianzas y covarianzas que satisface estas condiciones se conoce como **Matriz tipo H**; los cuadrados medios del análisis de la varianza pueden ser usados para probar las hipótesis sobre tratamientos intrasujetos si se cumplen la condición de Huynh-Feldt.

La condición de Huynh-Feldt para la matriz de varianzas y covarianzas de las p medidas repetidas, necesita $p-1$ contrastes ortogonales normalizados para que las medidas repetidas no se correlacionen y tengan varianzas iguales. Sea Σ la matriz de covarianza de las medidas repetidas y C una matriz de $(p-1) \times p$, donde los renglones son contrastes ortogonales normalizados de las p medidas repetidas. La condición de Huynn-Feldt necesaria para la covarianza de los contrastes es $C\Sigma C^t = \lambda I$. Si se satisface la condición se dice que la matriz de covarianzas λI es esférica.

Dada S el estimador máximo verosímil de Σ, se define el estadístico W de Mauchly (1940) como:

$$W = \frac{(p-1)^{p-1}|E|}{(tra(E))^{p-1}}$$

donde: $E = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})(X_{ij} - \overline{X}_{i.})^t$

Permite realizar el contraste de hipótesis:

$$H_0 : CSC_t = \lambda I$$
$$H_1 : CSC_t \neq \lambda I$$

mediante el estadístico de prueba:

$$T = -\left((n-1) - \frac{2k^2 - 3k + 3}{6(k-1)}\right) \ln(W) \sim \chi^2_v$$

bajo la hipótesis nula, donde $v = \frac{p(p-1)}{2} - 1$ n es el número de observaciones, $k = p(q-1) + 1$ p es el número de variables dependientes, q los grados de libertad de la fuente de variación de interés.

La varianza de las diferencias tiende a ser menor cuando las puntuaciones están altamente correlacionadas y mayor cuando las correlaciones son bajas. Algunos autores señalan también como situaciones típicas en las que se viola la esfericidad, aquellas en las que se desea medir el cambio en una variable entre diferentes condiciones experimentales en un corto período de tiempo, como en la investigación en Psicología Básica centrada en el aprendizaje. En estos experimentos las respuestas a los ensayos adyacentes frecuentemente tienen mayor correlación que los más lejanos.

Los estadísticos multivariados para prueba de esfericidad más comunes son: la traza de Pillai, la traza de Hotellind-Lawley y la mayor raíz característica de Roy, los cuales se definen como:

$$Pillai = \sum_i \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}; \quad Hotelling = \sum_i \lambda_i; \quad Roy = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$$

λ_i son los autovalores de la matriz $E^{-1}H$, donde E es la matriz de suma de cuadrados de los tratamientos, y H es la matriz de suma de cuadrados entre tratamientos definidas por:

$$\begin{aligned} E &= \sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})(X_{ij} - \overline{X}_{i.})^t \\ H &= \sum_i \sum_j (\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^t \end{aligned}$$

Se han realizado muchos estudios mediante simulación Monte Carlo para averiguar las consecuencias de la violación de la esfericidad sobre el estadístico F. En general, la investigación ha indicado que la F no es robusta ante las violaciones de este supuesto, tendiendo a ser liberal. Esta liberalidad implica que el uso del estadístico F puede llevar al investigador a rechazar la hipótesis nula con más frecuencia de la debida. Por otra parte, cuando se viola la esfericidad multimuestra, la F puede ser liberal o conservadora dependiendo de si la asociación entre el tamaño de los grupos (n_j) y las matrices de covarianzas es negativa o positiva, respectivamente. Existe una relación positiva cuando el grupo con mayor n_j está asociado a una matriz de covarianzas con mayores valores en sus elementos, y negativa cuando el grupo con mayor n_j está asociado a una matriz de covarianzas con menores valores en sus elementos.

En los diseños unifactoriales, Box (1954) mostró que la tasa de error de Tipo I se incrementa cuando la esfericidad se viola, con una relación positiva entre ellas. Señaló que el estadístico F sigue otra distribución con

los grados de libertad reducidos según el factor multiplicativo épsilon (ϵ), el cual depende de la matriz de covarianzas de la población. Cuando el supuesto de esfericidad es satisfecho, el valor de ϵ es igual o cercano a uno. La violación de la esfericidad es mayor cuanto más se aleje de uno y más se aproxime a su límite inferior. Geisser y Greenhouse (1958-1959) demostraron que el límite inferior de ϵ es $(1/p - 1)$.

Así, en un diseño unifactorial, cuando la esfericidad se satisface, el estadístico F se distribuye con $(p - 1)$ y $(p - 1)(N - 1)$ grados de libertad, siendo p el número de niveles del factor de medidas repetidas y N el número de sujetos. Sin embargo, cuando ésta es violada, Box (1954) mostró que F se distribuye con $\epsilon(p - 1)$ y $\epsilon(p - 1)(N - 1)$. Greenhouse y Geisser (1959) extendieron este resultado a los diseños de medidas repetidas multimuestra.

La comprobación del supuesto de esfericidad es el primer punto polémico en el análisis de los diseños de medidas repetidas, discusión que no es objeto del presente texto. Se ha propuesto comprobar el supuesto de esfericidad con la prueba W de Mauchly y el de homogeneidad de las matrices de covarianzas con la prueba M de Box. Sin embargo, algunos estudios han mostrado que son sensibles a las violaciones de la normalidad multivariada. Igualmente, diversos investigadores encontraron que ambas pruebas tenían poco valor para determinar la elección posterior de la estrategia de análisis, de forma que algunos autores aconsejan no comprobar los supuestos y utilizar directamente algún procedimiento para corregir el posible sesgo.

Se han propuesto diferentes alternativas de análisis estadístico para los diseños de medidas repetidas cuando se viola la esfericidad. A continuación se detallan algunos de estos procedimientos.

Pruebas F ajustadas: en general, las pruebas F ajustadas consisten en reducir los grados de libertad asociados al estadístico F del ANOVA en función del factor correctivo ϵ. De esta forma, la F observada se compara con la F crítica con los respectivos grados de libertad del numerador y denominador multiplicados por ϵ. Como el valor de ϵ es desconocido en la población, éste debe ser estimado. Las pruebas que utilizan la F ajustada varían dependiendo del procedimiento de estimación.

Ajuste mediante el límite inferior de ϵ: Geisser y Greenhouse (1958) propusieron el ajuste de los grados de libertad a partir del límite inferior de ϵ, de manera que la F observada se compara con la F crítica con los grados de libertad multiplicados por éste. Este procedimiento es muy conservador y algunos autores le llaman prueba de F conservadora. Cuando el computador no era una herramienta para el análisis de datos

y otras estimaciones de ϵ conllevaban una gran dificultad de cálculo, Greenhouse y Geisser (1959) propusieron una estrategia secuencial, la cual para un diseño de medidas repetidas unifactorial se aplicaría de la siguiente forma:

1. Si el estadístico F del ANOVA no es significativo, es decir, la hipótesis nula se mantiene como probable, entonces se detiene el análisis, ya que cualquier procedimiento de ajuste de los grados de libertad llevaría al mismo resultado.
2. Si el estadístico F es significativo, se comienza por el ajuste a partir del límite inferior de ϵ; si con este ajuste resulta significativo se detiene el proceso y se rechaza la hipótesis nula de diferencias entre medias, ya que cualquier otro ajuste conduciría al mismo resultado.
3. Si el estadístico F es significativo sin ajustar pero no lo es con el ajuste a partir del límite inferior, entonces se debería proceder a la estimación de ϵ por algún otro procedimiento.

Ajuste mediante $\widehat{\epsilon}$ de Box: Box (1954) propuso utilizar el estimador de ϵ simbolizado por $\widehat{\epsilon}$, el cual recibe el nombre en la mayoría de los paquetes estadísticos de $\widehat{\epsilon}$ de Greenhouse-Geisser. Greenhouse y Geisser (1959) extendieron este procedimiento a los diseños multimuestra. El estimador de ϵ viene dado en notación matricial por:

$$\widehat{\epsilon} = \frac{[tra(C^t SC)]^2}{[(p-1)tra(C^t SC)]^2}$$

Donde tra es el operador traza, C es cualquier matriz de orden $p \times (p-1)$ con $(p-1)$ coeficientes ortogonales entre medias que han sido normalizados y que expresan la hipótesis nula del factor de medidas repetidas (o en el caso multimuestra, asociadas con B y $A \times B$) y S es la estimación de la matriz de covarianzas de la población Σ.

Algunos autores han encontrado que $\widehat{\epsilon}$ subestima el valor de ϵ, particularmente cuando es cercano a uno, convirtiéndose en una prueba conservadora con violaciones moderadas de la esfericidad. Para corregir este sesgo, Huynh y Feldt(1976) desarrollaron otro estimador.

Ajuste de Huynh-Feldt: a partir de $\widehat{\epsilon}$, Huynh y Feldt (1976) propusieron otra estimación de ϵ, la cual se simboliza tradicionalmente como $\widetilde{\epsilon}$; ésta puede sobreestimar el valor de ϵ e incluso puede alcanzar valores

superiores a 1, en cuyo caso se iguala a 1. En los diseños unifactoriales, la estimación viene dada por:

$$\widetilde{\epsilon} = \frac{N(p-1)\widehat{\epsilon} - 2}{(p-1)[N-1-(p-1)\widehat{\epsilon}]}$$

donde N representa el número de sujetos y p el número de niveles del factor intrasujetos. En los diseños multimuestra, $\widetilde{\epsilon}$ se estima según:

$$\widetilde{\epsilon} = \frac{N(p-1)\widehat{\epsilon} - 2}{(p-1)[N-p-(q-1)\widehat{\epsilon}]}$$

donde p representa al número de niveles del factor intersujetos y q el número de niveles del factor de medidas repetidas.

Lecoutre (1991) propuso una corrección a la fórmula multimuestral, en la que se sustituye N en el numerador por $(N-p+1)$, cuyo estimador resultante se simboliza con $\widetilde{\epsilon}_L$. Señaló además, que la fórmula propuesta por Huynh y Feldt (1976) subestima la desviación de la esfericidad de la matriz de covarianzas, subestimación que puede ser sustancial cuando el número total de sujetos es pequeño.

Huynh y Feldt (1976) encontraron que $\widetilde{\epsilon}$ era más robusto que $\widehat{\epsilon}$ con valores de ϵ mayores o superior a 0.75. Por ello, algunos autores, como Barcikowski y Robey (1984) han sugerido utilizar $\widehat{\epsilon}$ cuando se piense que ϵ es menor que 0.75 y $\widetilde{\epsilon}$ cuando sea mayor o igual 0.75. Sin embargo, el problema radica en qué estimador de ϵ utilizar para determinar la estrategia. Quintana y Maxwell (1994) propusieron dos estrategias para un diseño de medidas repetidas multimuestra, a partir del uso condicional de $\widehat{\epsilon}$ o $\widetilde{\epsilon}_L$:

1. Calcular $\widehat{\epsilon}$ como estimador de ϵ. Si $\widehat{\epsilon} \geq 0{,}75$, se utiliza el ajuste mediante $\widetilde{\epsilon}_L$. En cualquier otro caso, utilizar $\widehat{\epsilon}$.
2. Calcular $\widetilde{\epsilon}_L$ como estimador de ϵ. Si $\widetilde{\epsilon}_L \geq 0{,}75$, se utiliza el ajuste mediante $\widetilde{\epsilon}_L$. En cualquier otro caso, utilizar $\widehat{\epsilon}$.

Igualmente, Quintana y Maxwell encontraron que los dos procedimientos arrojaban valores similares de probabilidad de cometer error de Tipo I, aunque el segundo presentaba valores más ajustados al α nominal. Chen y Dunlap (1994) hallaron que el mejor estimador de ϵ cuando $\epsilon = 0{,}522$ era $\widehat{\epsilon}$, independientemente del tamaño muestral o número de grupos. Sin embargo, con valores de $\epsilon = 0{,}752$ y $\epsilon = 0{,}831$, el estimador menos sesgado fue $\widetilde{\epsilon}_L$.

Ajuste ϵ_u de Maxwell y Arvey: Maxwell y Arvey (1982) encontraron que $\widehat{\epsilon}$ subestimaba el valor de ϵ en la población, especialmente cuando el tamaño muestral era pequeño y con valores cercanos a uno, mientras que $\widetilde{\epsilon}$ tendía a sobreestimarlo. Estas tendencias antagónicas llevaron a los autores a proponer la media entre ambos para la estimación de ϵ. El nuevo estimador fue simbolizado por Quintana y Maxwell (1994) como ϵ_u.

Ajuste ϵ_w de Quintana y Maxwell: Quintana y Maxwell (1994) propusieron, en la línea de Maxwell y Arvey (1982), el cálculo de la media entre los dos estimadores, pero adjudicándole a cada uno una ponderación indicativa de su importancia en la estimación. Basándose en los estudios previos, partieron de la idea de que $\widehat{\epsilon}$ y $\widetilde{\epsilon}$ eran más discrepantes cuando $\epsilon = 1$, por lo que en su opinión la elección de la ponderación era más importante en los valores de ϵ cercanos a uno. Por otro lado, la ponderación debería reflejar la subestimación de $\widehat{\epsilon}$ y la sobrestimación de $\widetilde{\epsilon}$. Así, el principal objetivo era encontrar un peso w, tal que:

$$wE(\widetilde{\epsilon}) + (1-w)E(\widehat{\epsilon}) = 1$$

A partir de los resultados de Muller y Barton (1989), Quintana y Maxwell (1994) derivaron el valor de w para $\epsilon = 1$ y muestras grandes,

$$w = \frac{2(q-2)}{(q-1)^2 + p(q-1) - 2}$$

siendo p el número de niveles del factor intersujetos y q el número de niveles del factor intrasujetos. Bajo las condiciones anteriormente mencionadas, la ponderación es menor a 0.50, lo que implica que $\widetilde{\epsilon}$ recibe menos peso en la estimación que $\widehat{\epsilon}$. El nuevo estimador fue simbolizado como ϵ_w.

8.3. Modelos Diseños con medidas repetidas en un factor intrasujetos

Los datos que permiten analizar este modelo proceden de un sólo grupo de sujetos y un único factor cuyos niveles son aplicados a todos los sujetos, en distintos instantes de tiempo. Las distintas medidas, tantas como los niveles del factor, son tomadas sobre los mismos sujetos . De allí, el nombre de medidas repetidas. Supongamos se dispone de una única población y que,

sobre cada individuo de la muestra elegida, se miden q variables en escala de razón o intervalo, $X_1, X_2, \cdots, X_q$, cuyos posibles valores son comparable. Considerando que las q variables corresponden a q niveles de un factor de efectos fijos A y que los N individuos son una muestra aleatoria de otro factor B de efectos aleatorios, el modelo que se postula para explicar los datos es el modelo lineal:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

donde:

y_{ij} es la puntuación i del individuo j sobre la variable Y.

μ es la media poblacional de la variable Y.

α_i es el efecto debido a la i-ésima variable X_i, se supone que $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 0$.

β_j es el efecto aleatorio producto del sujeto j, se supone que los β_j son independientes entre sí, con distribución $N(0, \sigma_b^2)$.

ε_{ij} representan los residuos o errores del modelo lineal, se suponen variables aleatorias independientes entre sí, con distribución $N(0, \sigma^2)$.

La tabla de análisis de la varianza para medidas repetidas con un factor intra-sujetos, se calcula para un modelo mixto con dos factores, sin interacciones y con una observación por celda.

El contraste que se desea realizar es que los efectos debidos a los niveles del factor A son nulos, será expresado como:

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \alpha_i = 0 \ \ i = 1, 2, \cdots, q \\ H_1 &: \ \text{algún } \alpha_i \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba se define:

$$F_A = \frac{MS_A}{MS_{AB}} \sim F_{(q-1),(q-1)(N-1)}$$

bajo la hipótesis nula. Fijado el nivel de significancia α, la regla de decisión para el contraste asociado al efecto del factor A, será:

$$\begin{aligned} \text{Aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &\leq F_{\alpha,(q-1),(N-1)(q-1)} \\ \text{No aceptar } H_0 \text{ cuando } F_A &> F_{\alpha,(q-1),(N-1)(q-1)} \end{aligned}$$

Lo cual equivale en términos del $p - valor$, aceptar H_0 si $p - valor \geq \alpha$, en caso contrario no aceptarla.

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de. libertad	Media cuadrática	test F	Sig.
Factor A	SS_A	$q-1$	$MC_A = \frac{SS_A}{q-1}$	$\frac{MC_A}{MC_W}$	p
Sujeto	SS_B	$N-1$	$MC_B = \frac{SS_B}{N-1}$		
Intragrupos	SS_W	r	$MC_W = \frac{SS_W}{(q-1)(N-1)}$		
Total	SS_T	$qN-1$			

Tabla 8.1: Tabla ANOVA un factor con Medidas repetidas

La tabla de Diseños con medidas repetidas con un factor intrasujetos se resume como:

cuando $r = (q-1)(N-1)$. Las sumas de cuadrados se expresan como:

$$SS_A = \frac{1}{N}\sum_i \left(\sum_j y_{ij}\right)^2 - C \qquad SS_B = \frac{1}{a}\sum_j \left(\sum_i y_{ij}\right)^2 - C$$

$$SS_W = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - C - \left(SS_A + SS_B\right) \qquad SS_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - C$$

$$C = \frac{1}{aN}\left(\sum_i \sum_j y_{ij}\right)^2$$

8.4. Modelo con medidas repetidas en dos factores intra-sujetos

El diseño con medidas repetidas en dos factores, conocido también como *diseño tratamiento-tratamiento-sujeto*, no es más que una generalización del diseño intra-sujetos; se trata de una estructura de investigación en la que N sujetos seleccionados al azar de una determinada población se sometan a cada una de las diferentes combinaciones de tratamientos obtenidas a partir de los valores de los dos factores experimentales. Se asume un modelo de efectos fijos.

La matriz del diseño se representa en la tabla 8.2.

El modelo subyacente al análisis de la varianza bajo la hipótesis alternativa en este diseño, es el asociado a un diseño con tres factores intersujetos,

		Factor A										
		a_1					a_a					
Factor B		b_1	$\vdots$	b_k	$\vdots$	b_b	b_1	$\vdots$	b_k	$\vdots$	b_b	
Sujetos S	S_1	y_{111}	$\vdots$	y_{11k}	$\vdots$	y_{11b}	y_{1a1}	$\vdots$	y_{1ak}	$\vdots$	y_{1bb}	
	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	
	S_j	y_{j11}	$\vdots$	y_{j1k}	$\vdots$	y_{j1b}	y_{1a1}	$\vdots$	y_{jak}	$\vdots$	y_{jab}	
	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	
	S_N	y_{N11}	$\vdots$	y_{N1k}	$\vdots$	y_{N1b}	y_{Na1}	$\vdots$	y_{Nak}	$\vdots$	y_{Nab}	

Tabla 8.2: Matriz del diseño

con la salvedad que el tercer factor no es manipulable, sino un factor sujeto. Se puede expresar de manera lineal como:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \eta_i + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + (\eta\alpha)_{ij} + (\eta\beta)_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

y_{ijk}**:** observación de la variable respuesta

μ**:** media común de todas las observaciones

α_j**:** efecto asociado a la aplicación del nivel j del primer factor

η_i**:** componente asociado al sujeto i, constante a lo largo de las observaciones

β_k**:** efecto relativo a la aplicación del nivel k del segundo factor intra-sujetos

$(\alpha\beta)_{jk}$**:** efecto asociado a la interacción del nivel j del primer factor con el nivel k del segundo factor intra-sujetos

$(\eta\alpha)_{ij}$**:** efecto relativo a efecto del individuo i con el j-ésimo nivel del factor A

$(\eta\beta)_{ik}$**:** efecto relativo a efecto del individuo i con el jk-ésimo nivel del factor B

ε_{ijk}**:** componente aleatorio del modelo lineal

La tabla de ANOVA de un diseño con medidas repetidas en dos factores intra-sujetos se resume en la tabla 8.3.

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de. libertad	Media cuadrática	test F	Sig.
A	SS_A	$a-1$	MC_A	F_A	p
B	SS_B	$b-1$	MC_B	F_B	p
S	SS_S	$n-1$	MC_S		
$A \times S$	SS_{AS}	$(a-1)(n-1)$	MC_{AS}		
$B \times S$	SS_{BS}	$(b-1)(n-1)$	MC_{BS}		
$A \times B$	SS_{AB}	$(a-1)(b-1)$	MC_{AB}	F_{AB}	p
$A \times B \times S$	SS_{ABS}	(a-1)(b-1)(n-1)	MC_{ABS}		
Total	SS_T	$abn-1$			

Tabla 8.3: Tabla ANOVA para un diseño con dos factores intra-sujetos

Donde las sumas de cuadrados se expresan como:

$$
\begin{aligned}
SS_A &= \frac{1}{nb}\sum_j \left(\sum_i \sum_k y_{ijk}\right)^2 - C \\
SS_B &= \frac{1}{na}\sum_k \left(\sum_i \sum_j y_{ijk}\right)^2 - C \\
SS_S &= \frac{1}{ab}\sum_i \left(\sum_j \sum_k y_{ijk}\right)^2 - C \\
SS_{AS} &= \frac{1}{b}\sum_i \sum_j \left(\sum_k y_{ijk}\right)^2 - C - (SS_A + SS_S) \\
SS_{BS} &= \frac{1}{a}\sum_i \sum_k \left(\sum_j y_{ijk}\right)^2 - C - (SS_B + SS_S) \\
SS_{AB} &= \frac{1}{n}\sum_j \sum_k \left(\sum_i y_{ijk}\right)^2 - C - (SS_A + SS_B) \\
SS_{ABS} &= SC_T - \left(SS_A + SS_B + SS_S + SS_{AS} + SS_{BS} + SS_{AB}\right) \\
SS_T &= \sum_i \sum_j \sum_k \left(y_{ijk}\right)^2 - C \\
C &= \frac{1}{abn}\left(\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}\right)^2)
\end{aligned}
$$

Mientras que las medias cuadráticas se calculan usando las expresiones:

$$MC_A = \frac{SS_A}{a-1},\ MC_B = \frac{SS_B}{b-1}\ MC_S = \frac{SS_S}{n-1}$$
$$MC_{AS} = \frac{SS_{AS}}{(a-1)(n-1)},\quad MC_{BS} = \frac{SS_{BS}}{(b-1)(n-a)}$$
$$MC_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)},\ MC_{ABS} = \frac{SS_{ABS}}{(a-1)(b-1)(n-1)}$$

Finalmente:

$$F_A = \frac{MC_A}{MC_{AS}},\ F_B = \frac{MC_B}{MC_{BS}},\ F_{AB} = \frac{MC_{AB}}{MC_{ABS}}$$

El contraste de hipótesis principal relativo a los diseños con dos factores intrasujetos, es aquel asociado a la interacción de los factores, expresada como:

$$\begin{aligned} H_0 &: (\alpha\beta)_{jk} = 0\ \forall\, j,k \\ H_1 &: \text{ al meno uno no nulo} \end{aligned}$$

En caso de aceptar la hipótesis nula se debe proceder a efectuar los contrastes relativos a los efectos principales de los factores:

Factor A

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_j = 0\ \forall\, j \\ H_1 &: \text{ al meno uno no nulo} \end{aligned}$$

Factor B

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_k = 0\ \forall\, k \\ H_1 &: \text{ al meno uno no nulo} \end{aligned}$$

Las desiciones se toman en término de las pruebas de modelos con dos factores estudiados en capítulos anteriores.

8.5. Dieños de medidas parcialmente repetidas

Los diseños con medidas parcialmente repetidas son estructuras de investigación en los cuales se combinan diversas características , tanto de los diseños inter-sujetos como de los diseños entre-sujetos. Razón por la cual, cuando se establecen diseños con medidas parcialmente repetidas, el análisis

de los datos requiere el cumplimiento de los supuestos que sustentan a ambos tipos de diseños.

Con respecto a las fuentes de variación intersujetos, se deben asumir las tres condiciones básicas para llevar a cabo el análisis de la varianza con diseños de medidas independientes, a saber, el supuesto de normalidad, el supuesto de homogeneidad de las varianzas (homocedasticidad) y el supuesto de independencia de las observaciones.

Por otra parte, las fuentes de variación intra-sujetos requieren el cumplimiento del supuesto de esfericidad. En lo referente a este supuesto cabe señalar que, en caso que se incumpla, la corrección de los grados de libertad mediante la F conservadora o mediante la $\widehat{\epsilon}$ de Greenhouse y Geisser, únicamente debe aplicarse sobre los factores de medidas repetidas que tengan más de dos niveles y sobre las interacciones entre cualquier factor intersujetos y aquel(los) factor(es) intra-sujetos que contenga(n) más de dos niveles, ya que, si el factor de medidas repetidas tiene únicamente dos categorías, no se produce ningún tipo de ajuste. A su vez, es importante tener en cuenta que, dado que en los diseños de medidas parcialmente repetidas, todas las fuentes de variación intra-sujetos utilizan la media cuadrática del efecto debido a la interación entre el i-ésimo sujeto y el $k$ésimo nivel de las variable intra-sujeto dentro del j-ésimo nivel de la variable entre-sujetos ($MC_{(SXB)A}$ como término de error, un sólo ajuste válido para cualquiera de los efectos que se incluyen dentro loas fuentes de variación intra-sujeto.

8.5.1. Diseño de parcelas divididas

Este es un diseño experimental combinado que resulta útil cuando al estudiar simultáneamente varios factores, alguno o algunos de ellos deben ser aplicados sobre unidades experimentales relativamente grandes, pudiéndose aplicar el otro o los otros en unidades experimentales menores, dentro de las unidades mayores. El caso más sencillo es aquél en el que se tienen sólo dos factores, asignando los niveles de uno de ellos a las unidades mayores y los niveles del otro a las subunidades. A las unidades experimentales mayores suele llamárseles parcelas grandes o parcelas principales y a las unidades experimentales menores se le llama subparcelas o subunidades.

Se debe notar que además de que los niveles de los diferentes factores son asignados a unidades experimentales de diferentes tamaños, está implícito también un número diferente de repeticiones. El número de repeticiones para el factor asignado a las subunidades es $r*a$, siendo r el número de repeticiones del factor asignado a las unidades principales y a su número de niveles.

El factor correspondiente a las parcelas principales puede asignarse a éstas utilizando cualquiera de los esquemas de aleatorización básicos: Completa-

mente al Azar, en Bloques al Azar o en Cuadro Latino. El factor correspondiente a las subparcelas se asigna al azar dentro de cada parcela principal; en tal sentido, las parcelas principales son análogas a bloques, solo que por asignarse a éstas los niveles de un efecto fijo y por existir repeticiones de las mismas, es posible evaluar tanto los efectos principales del factor asignado a las mismas como su posible interacción con en el otro factor.

En este diseño, el proyecto suele sacrificar la precisión en la estimación de los efectos promedio de los tratamientos en el factor asignado a las parcelas principales, aunque frecuentemente se incrementa la precisión para comparar los efectos promedio de tratamientos asignados a subparcelas; y cuando existen interacciones para comparar los efectos de tratamientos de subparcelas en un tratamiento de una parcela principal. Esto se desprende del hecho de que $EE_{PP} > EE_{sp}$.

Ventajas: para los conocedores del tema las ventajas relativas a los diseños en parcelas divididas son:

1. Como la varianza de la subunidad es generalmente inferior a la varianza de toda unidad, el factor de tratamiento de subunidad y la interacción se contrasta, generalmente, con una mayor sensibilidad.
2. Este tipo de diseños permite formular experimentos con un factor que requieren relativamente grandes cantidades de material experimental (unidades enteras) junto con un factor que requieren material relativamente poco experimental (sub-unidad) en el mismo experimento.
3. Si un experimento está diseñado para estudiar uno sólo de los factores, puede incluirse un segundo factor costo muy poco.
4. Es el diseño (univariante) para experimentos que impliquen medidas repetidas en la misma unidad experimental (unidad entera), mientras que las medidas repetidas en el tiempo son la subunidad.

Desventajas: como toda familia de diseño experimental, las parcelas divididas presenta algunas desventajas, entre ellas tenemos:

1. El análisis se complica por la presencia de dos de las variaciones de error experimental, que conduce a varios SE diferentes para las comparaciones.
2. Alta varianza y pocas replicas de unidades de toda parcela con frecuencia, lleva a sensibilidad pobre en el factor de unidad completa

Usos: entre las posibles aplicaciones de los diseños con parcelas divididas podemos citar:

1. Cuando uno de los factores, por su naturaleza, exige parcelas relativamente grandes, por ejemplo, sistemas de labranza, de irrigación, distancias entre surcos, niveles de luz o de temperatura; mientras que el otro factor permite su aplicación sobre unidades experimentales más pequeñas como variedades, distancia entre plantas, dosis de fertilizantes, etc.
2. Cuando en un experimento se toman varias mediciones sobre la misma unidad experimental a través del tiempo y tales mediciones son independientes, puede considerarse el conjunto de las mediciones realizadas sobre una misma unidad experimental como la Unidad Principal, y cada una de las lecturas realizadas en el tiempo como las subunidades. El análisis es análogo al de un diseño Parcelas Divididas (en el espacio), por lo que se le designa a este diseño como Parcelas Divididas en el Tiempo.
3. Si luego de iniciado el experimento se desea incluir otro factor -y su naturaleza lo permite-, pueden dividirse las unidades experimentales y realizar la aleatorización de los niveles del segundo factor en las subunidades resultantes.
4. Debido a que el factor asignado a las subparcelas cuenta con más repeticiones, los efectos relacionados con éste se estiman con mayor precisión. Aunque muchos autores relacionan esta característica como uno de los criterios para escoger un Diseño Parcelas Divididas, se considera que éste no debería condicionar la escogencia del Diseño y se menciona aquí más como una consecuencia del uso del mismo, cuando se elija con base en alguno de los tres primeros criterios

8.5.2. El modelo matemático

El modelo analítico utilizado habitualmente para llevar a cabo pruebas de hipótesis con diseños de medidas parcialmente repetidas es el modelo lineal expresado como:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \eta_{i(j)} + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \epsilon_{ijk}$$

donde:

y_{ijk}**:** observación de la respuesta para el i-ésimo sujeto bajo el j-ésimo nivel de la variable inter-sujeto y el k-ésimo nivel de la variable intrasujetos

μ**:** la media de todas las observaciones

α_j**:** efecto relativo al j-ésimo nivel del factor inter-sujetos

$\eta_{i(j)}$**:** efecto específico asociado al i-ésimo sujeto dentro del j-ésimo nivel de la variable inter-sujeto

β_k**:** efecto debido a la administración del j-ésimo nivel del factor B

$(\alpha\beta)_{jk}$**:** efecto de la interacción del j-ésimo nivel del factor inter-sujeto y el k-ésimo nivel del factor intra-sujetos

ϵ_{ijk}**:** componente aleatorio asociado al modelo lineal

Se asume que los términos $\eta_{i(j)}$, ϵ_{ijk} poseen distribución independiente, idénticas: $\eta_{i(j)} \sim N(0, \sigma^2_\eta)$ $\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$

Cabe señalar que, aunque el diseño consta de tres factores, no es posible estimar todas las interacciones entre ellos, ya que la variable intersujetos no se cruza factorialmente con la variable sujeto, sino que esta última se halla anidada en la primera. La matriz del diseño se representa en la tabla 8.4

			Factor B				
Factor S			b_1	$\cdots$	b_k	$\cdots$	b_3
Factor A	a_1	S_{11}	y_{111}	$\cdots$	y_{11k}	$\cdots$	y_{11b}
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
		S_{i1}	y_{i11}	$\cdots$	y_{i1j}	$\cdots$	y_{i1b}
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
		S_{n1}	y_{n11}	$\cdots$	y_{n1k}	$\cdots$	y_{n1b}
	a_j	S_{j1}	y_{1j1}	$\cdots$	y_{1jk}	$\cdots$	y_{1jb}
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
		S_{ij}	y_{ij1}	$\cdots$	y_{ijk}	$\cdots$	y_{ijb}
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
		S_{nj}	y_{nj1}	$\cdots$	y_{njk}	$\cdots$	y_{njb}
	a_a	S_{1a}	y_{1a1}	$\cdots$	y_{1ak}	$\cdots$	y_{1ab}
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
		S_{1a}	y_{1a1}	$\cdots$	y_{iak}	$\cdots$	y_{iab}
		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
		S_{na}	y_{na1}	$\cdots$	y_{nak}	$\cdots$	y_{nab}

Tabla 8.4: Matriz del diseño

En la tabla 8.5 se resumen las fórmulas necesarias para el cálculo de las diferentes sumas de cuadrados:

Variabilidad inter sujetos	$SCS = \frac{1}{b}\sum_i \sum_j \left(\sum_k y_{ijk}\right)^2 - C$
Factor intersujeto A	$SCA = \frac{1}{nb}\sum_j \left(\sum_i \sum_k y_{ijk}\right)^2 - C$
Sujetos intra A(Error)	$SCS_A = SCS - SCA$
Factor intra-sujeto B	$SCB = \frac{1}{an}\sum_k \left(\sum_i \sum_j y_{ijk}\right)^2 - C$
Interacción $A \times B$	$SCAB = \frac{1}{n}\sum_j \sum_k \left(\sum_i y_{ijk} - C - (SCA + SCB)\right.$
(sujeto$\times B$) intra A (error)	$SCSB_A = SCT - (SCS + SCB + SCAB)$
Variabilidad intra-sujeto	$SC_{intra} = SCT - SCS$
Variabilidad total	$SCT = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - C$
C	$C = \frac{1}{abn}\left(\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}\right)^2$

Tabla 8.5: Fórmulas

La tabla ANOVA general de un diseño en parcelas divididas se resume en la tabla 8.6.

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad.	Media cuadrática	F
Factor A	SCA	$a-1$	$MCA = \frac{SCA}{a-1}$	$\frac{MCA}{MCS_A}$
Factor B	SCB	$b-1$	$MCB = \frac{SCB}{b-1}$	$\frac{MCB}{MCSB_A}$
Sujeto/A	SCS_A	$a(n-1)$	$MCS_A = \frac{SCS_A}{a(n-1)}$	$\frac{MCS_A}{MCSB_A}$
$A \times B$	$SCAB$	k	$MCAB = \frac{SCAB}{k}$	
(Sujeto$\times B$)/A	$SCSB_A$	h	$MCSB_A = \frac{SCSB_A}{h}$	
Total	SCT	$abn-1$		

Tabla 8.6: ANOVA diesño en parcelas divididas

Cuando $h = a(b-1)(n-1)$ y $k = (a-1)(b-1)$ Las hipótesis que pueden ser contrastadas usando el modelo lineal son:

Efecto de la interacción:

$$\begin{aligned} H_0 &: (\alpha\beta)_j k = 0 \, \forall j, k \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

En caso de aceptar que el efecto de la interacción es nulo, se estudian los efectos del factor inter-sujeto:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_j = 0 \, \forall j \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

Y los efectos del factor intra-sujeto:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_k = 0 \, \forall k \\ H_1 &: \text{ al menos uno no nulo} \end{aligned}$$

8.5.3. Comparaciones múltiples

En el caso de los efectos principales y de las interacciones entre factores de la misma naturaleza, los procedimientos utilizados para realizar comparaciones múltiples entre las medias de los grupos o de los tratamientos en los diseños con medidas parcialmente repetidas, son los mismos que se emplean en diseños intra-sujetos e inter-sujetos.

En términos de la naturaleza de los diseños parcialmente repetidas, las comparaciones que se efectúan después de rechazar la hipótesis nula asociada a la interacción de los niveles y a los efectos principales que constituyen las fuentes de variación intersujetos, se lleva a cabo mediante procedimientos adecuados para diseños inter-sujetos. En el caso de los efectos principales y las interacciones de las fuentes de de variación intra-sujeto, se utilizan los métodos de comparaciones múltiples apropiadas para diseños con medidas repetidas. Cada uno de estos procedimientos fueron considerados en capítulos precedentes.

Las pruebas de comparaciones múltiples para el estudio de las diferencias existentes entre los grupos en cada nivel de la variable de medidas repetidas se basan el estadístico:

$$t_{\psi \, inter \; en \; intra} = \frac{\overline{y}_{jk} - \overline{y}_{j'k}}{\sqrt{\frac{2MC_{intra}}{n}}} \tag{8.3}$$

donde:

$$MC_{intra} = \frac{SCS_A + SCSB_A}{a(n-1) + a(n-1)(b-1)} \tag{8.4}$$

Los valores críticos, para cada comparación múltiple, se obtienen a partir de la expresión:

$$h_\alpha = \frac{h_1 MCS_A + h_2 MCSB_A(b-1)}{MCS_A + MCSB_A(b-1)} \tag{8.5}$$

cuando:

h_α**:** valor crítico para una prueba de comparaciones múltiples, como por ejemplo, la prueba HSD de Tukey

h_1, h_2**:** valores críticos a un nivel α para comparaciones múltiples con $glS_A = a(n-1)$ y $glSB_A = a(n-1)(b-1)$, respectivamente. Estos valores pueden calcularse a partir de los valores críticos de la distribución t o bien a partir de la distribución q de rangos estudentizados, en cuyo caso se utiliza el valor 2 como parámetro de número de medias.

Debe tenerse en cuanta que si h_1 y h_2 son valores q de rango estudentizado, el valor h_α ha de dividirse entre $\sqrt{2}$ con el fin de obtener el valor crítico de t.

8.6. Diseños con medidas repetidas en SPSS

Los diseños con medidas repetidas se pueden analizar en SPSS mediante el subcomando *Medidas Repetidas* del procedimiento **Modelo lineal general**. Este procedimiento debe utilizarse cuando tenemos al menos una variable manipulada intrasujetos, es decir, cuando todos los sujetos reciben o pasan por todos los niveles de esa variable independiente. Así, se utilizará en aquellos casos que tengamos sólo una variable independiente intrasujetos (diseño unifactorial de medidas repetidas), o cuando tengamos dos variables independientes ambas intrasujetos (Diseño bifactorial de medidas repetidas) o una de ellas intrasujetos y la otra entregrupos (diseño bifactorial mixto). En todos estos casos y en sus extensiones lo más adecuado es seleccionar en el menú:

```
Analizar --> Modelo lineal General --> Medidas repetidas
```

Activándose la caja de diálogos ilustrada en la figura 8.1
Los campos asociados a esta pantalla son:

Nombre del factor intra-sujeto: este campo permite definir el factor medido en todos los sujetos de la muestra, en diferentes instantes del estudio, para tal fin siga las instrucciones:

- Introduzca un nombre para el factor intra-sujetos.
- No duplique ningún nombre de variable, puesto que un factor en Diseños con medidas repetidas se corresponde con más de una variable del archivo de datos, es un factor que no existe en ninguna parte, conviene utilizar nombres que tengan sentido para el usuario y que tengan relación con el significado del factor.

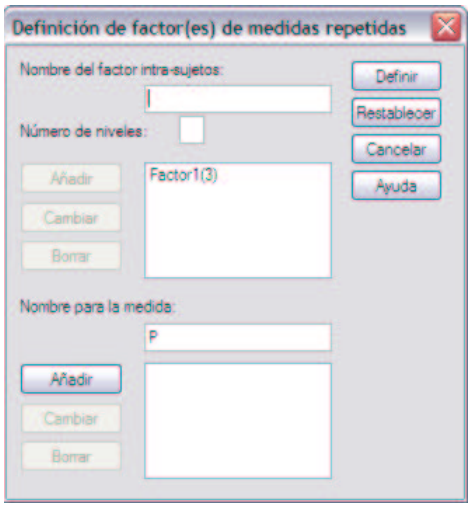

Figura 8.1: Medidas repetidas 1

- Cada factor adicional indica niveles dentro del factor precedente.
- El límite es 18 factores intra-sujetos.

Número de niveles: introduzca el número de niveles para el factor nombrado. Cada nivel representa una observación distinta del mismo sujeto.

Nombre para la medida: cuando se mide más de una variable dependiente para cada sujeto, introduzca un nombre para cada tipo de medida. Por ejemplo, suponga que se miden la respiración y la temperatura cada día para cada sujeto. Los nombre de medida podrían ser Resp y Temp. Después de escribir el nombre pulse en Añadir. (No duplique un nombre de variable del archivo).

Al ejecutar el comando **Aceptar** se activa la caja de diálogo ilustrada en la figura 8.2.

Los campos de interés de esta pantalla son:

Variable intra-sujeto: seleccione una variable dependiente que corresponda a cada combinación de los factores intra-sujetos (y opcionalmente la medida) de la lista. Los números entre paréntesis indican el nivel del factor para cada factor intra-sujetos.

Factores inter-sujeto: opcionalmente, puede seleccionar uno o más factores inter-sujetos, que son las variables que dividen la muestra en subgrupos discretos.

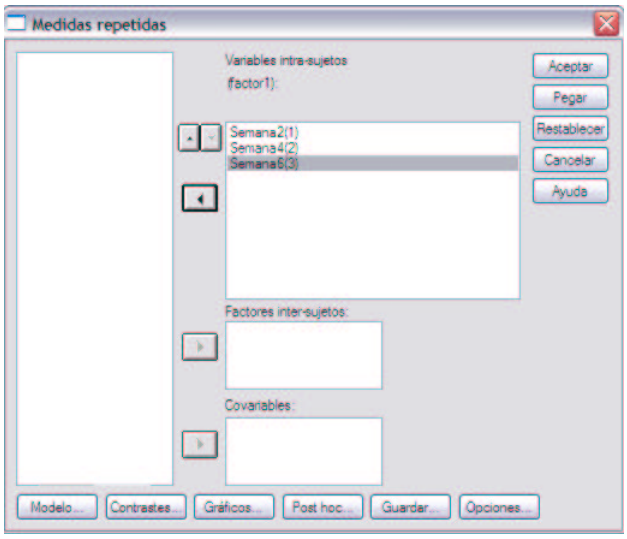

Figura 8.2: Medidas repetidas 1

Covariables: las covariables son variables predictoras cuantitativas. Puede utilizar las covariables junto con las variables dependientes para definir un modelo de regresión.

Modelo: permite definir un modelo saturado y seleccionar el tipo de suma de cuadrados. El único modelo con sentido en un diseño con un factor es justamente el que incluye ese factor. Por tanto, en el caso de Diseños con medidas repetidas carece de sentido utilizar este campo, excepto para cambiar el tipo de suma de cuadrados que el SPSS utiliza por defecto; hecho, por otro lado, poco recomendable.

Al ejecutar este campo se activa la pantalla representada en la figura 8.3

Contraste: permite dividir la suma de cuadrados inter-grupos en componentes de tendencia o especificar contrastes *a priori* para que se contrasten mediante el estadístico t. La pantalla asociada a este comando se ilustra en la figura 8.4.

Gráficos: este campo coincide con el campo de igual nombre estudiado en los capítulos anteriores.

Post hoc: las comparaciones *post hoc* no están disponibles para los diseños que incluyen factores con medidas repetidas. Sólo se pueden utilizar

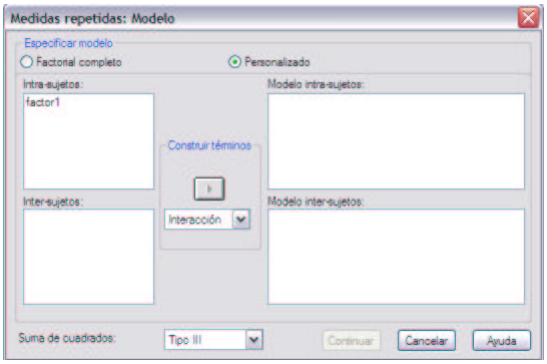

Figura 8.3: Medidas repetidas: Modelo

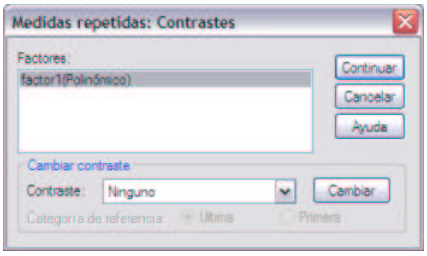

Figura 8.4: Medidas repetidas:Contraste

para comparar los distintos niveles de un factor inter-sujeto, cuando éste existe, en cada uno de los niveles del factor con medidas repetidas. Para comparar dos a dos los niveles de un factor con medidas repetidas puede utilizarse la opción **Comparar los efectos principales**, que consideraremos más adelante.

Guardar: esta opción es de interés cuando se realiza un análisis de regresión

Opciones: este campo presenta gran similitud con su análogo estudiado en los diseños factoriales; pero ahora contiene algunas opciones nuevas y algunas variantes que pueden resultar interesante comentar.

Comenzaremos señalando que las opciones **Pruebas de homogeneidad y Diagramas de dispersión por nivel** no están disponibles, ya que en Diseños con medidas repetidas no existen grupos, por tanto no tiene sentido establecer supuestos sobre la varianza poblacional en los grupos.

Una de las opciones más interesantes es la que se refiere a la comparación de los efectos principales, aunque, el procedimiento **Medidas repetidas** no permite efectuar comparaciones *post hoc* entre los niveles de un factor con Medidas repetidas, se puede utilizar la opción *Comparar los efectos principales* para comparar dos a dos los distintos niveles del factor.

Por otra parte, el campo *Opciones* del procedimiento **Medidas repetidas** contiene tres opciones nuevas no incluidas en su análogo del ANOVA factorial: *Matrices SCPC, Matriz SCPC residual y matriz de transformación.*

Matrices SCPC: matrices de Sumas de Cuadrados y Productos Cruzados (SCPC). Se muestran las matrices SCPC de las hipótesis y del error. Cada efecto inter-sujetos tiene una matriz SCPC diferente, pero sólo hay una única matriz error para todos los efectos inter-sujetos. Para las medidas repetidas, cada efecto intra-sujetos tiene tanto una matriz de hipótesis como una de error. Para un efecto dado, la matriz SCPC muestra, en la diagonal, la suma de cuadrados correspondiente a ese efecto descompuesta en tantas partes como grados de libertad tiene ese efecto.

La descomposición se efectúa a partir de los contrastes definidos en el cuadro de diálogo *Contrastes*. Si para un efecto concreto se han definido contrastes, por ejemplo, *polinomiales* la suma de cuadrados de la diagonal de la matriz SCPC correspondiente a este efecto mostrará la suma de cuadrados que corresponde a cada polinomio o tendencia.

Matriz SCPC residual: suma de Cuadrados y Productos Cruzados (SCPC) de los residuos. La dimensión de la matriz SCPC residual es la misma que el número de variables dependientes del modelo. Para obtener la matriz de covarianza residual, se divide la matriz SCPC residual por los grados de libertad residuales.

La matriz de correlaciones residual es la forma tipificada de la matriz de covarianza residual. Esta matriz contiene tres subtablas, todas ellas basadas en información sobre los residuos, las diferencias entre los valores observados y los valores pronosticados por el modelo.

La primera tabla ofrece las sumas de cuadrados de cada nivel del factor en la diagonal, y los productos cruzados fuera de la diagonal. La segunda las varianzas en la diagonal y las covarianzas fuera de la diagonal. Finalmente, la tercera incluye la misma información

que la segunda, pero tipificada: las correlaciones entre los residuos de cada nivel del factor.

Al solicitar la matriz SCPC residual el SPSS ofrece también la prueba de esfericidad de Bartlett, similar a la prueba de Mauchly. Si se cumple el supuesto de normalidad, la prueba de Bartlett permite contrastar la hipótesis de que la matriz de varianzas-covarianzas residuales es proporcional a la matriz identidad, basados en dos estadísticos asintóticamente equivalentes: la *razón de verosimilitud* y el estadístico *chi-cuadrado*.

Matriz de transformación: la matriz de los coeficientes de transformación, o matriz M, la cual ofrece una transformación de las variables dependientes. Realmente, ofrece los coeficientes normalizados que el SPSS asigna a cada nivel del factor con medidas repetidas en cada uno de los contrastes definidos en el comando *Contrastes*.

8.7. Solución de problemas

En esta sección se discutirán algunos ejemplos prácticos que permitirán ilustrar los conceptos desarrollados en el presente capítulo, además de mostrar la aplicación del menú **Medidas repetidas** del procedimiento **Modelo lineal general** de SPSS.

El primer ejemplo a estudiar, es un diseño Diseños con medidas repetidas en un factor intrasujetos, seguido de un diseño Diseños con medidas repetidas en dos factores intrasujetos, finalizamos la sección de ejemplos discutiendo un modelo Diseños con medidas repetidas para un factor intrasujetos y un factor intersujetos.

Problema 8.1 *Para dar respuesta al bajo rendimiento en Matemáticas, se desarrollo e implemento un nuevo diseño instruccional. Se seleccionan al azar 20 alumnos y se le realizó un seguimiento durante los tres lapsos académicos del año escolar. La calificación final es el promedio de las calificaciones de los tres lapsos. Basados en la información contenida en la tabla siguiente; existen diferencias significativas en las calificaciones alcanzadas en los tres lapsos, al nivel de significancia del 5 %?.*

Primer Lapso	Segundo Lapso	Tercer Lapso	Primer Lapso	Segundo Lapso	Tercer Lapso
13	14	15	10	11	12
15	15	13	11	13	15
13	16	12	17	11	17
14	14	16	14	12	9
16	13	12	12	11	10
17	16	9	20	10	13
15	18	17	17	8	14
14	19	12	18	18	12
15	16	19	19	8	13
18	10	10	13	12	14

Solución

Al observar la información contenida en la tabla del ejemplo se puede inferir un diseño con medidas repetidas en un factor, que consta de tres niveles uno por cada una de las variables que definen los tres lapsos académicos.

Para realizar el Diseños con medidas repetidas en un factor intra-sujeto, es necesario ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar  -->  Modelo lineal General  --> Medidas repetidas
```

En la caja de diálogo asociada a este procedimiento, se asigna la siguiente información:

```
Nombre del factor intra-sujeto: Tiempo
Número de niveles: 3
   Añadir
Definir
```

Activándose la caja de diálogo que permite definir las variables intra-sujetos(Tiempo), mediante los comandos:

```
Lapso1(1)
Lapso2(2)
Lapso3(3)
Gráficos de perfil
   Eje horizontal: Tiempo
     Añadir
   Continuar
```

```
Opciones
     Mostrar medias para: Tiempo
     Comparar efectos principales
   Continuar
Aceptar
```

Generando un reporte completo, que analizaremos a continuación:

					Epsilon		
Efecto	W de Mauchly	χ^2	G.L	Sig	G-G	H-F	L.I
Tiempo	0.947	0.975	2	0.614	0.950	1.000	0.5000

Tabla 8.7: Prueba de esfericidad de Mauchly

En los modelos de Diseños con medidas repetidas es necesario suponer que las varianzas de las diferencias entre cada dos niveles del factor son iguales. En nuestro caso de estudio, el factor con medidas repetidas presenta 3 niveles, los cuales forman tres pares de combinaciones dos a dos entre los niveles. Calculando las diferencias entre la puntuaciones de esos tres pares, se tendrán tres nuevas variables. En el modelo con medidas repetidas se supone que las varianzas de esas 3 variables son iguales, es decir la matriz de varianzas-covarianzas es esférica. La tabla **Prueba de esfericidad de Mauchly** reporta un resumen del contraste de hipótesis de esfericidad utilizando el test W de Mauchly; el $p-valor$ asociado al contraste de hipótesis posee valor 0.614 mayor que $\alpha = 5\,\%$, es decir, al nivel de significancia α no podemos rechazar la hipótesis de esfericidad.

				G.L	G.L	
Efecto		Valor	F	Hipótesis	Error	Sig
Tiempo						
	Traza de Pillai	0.248	2.975	2	18	0.077
	Traza de Wilk	0.752	2.975	2	18	0.07
	Traza de Hotelling	0.331	2.975	2	18	0.07
	Raíz mayor de Roy	0.331	2.975	2	18	0.07

Tabla 8.8: Contrastes multivariados

En caso de que el estadístico W de Mauchly lleve a rechazar la hipótesis nula, es posible optar por dos soluciones alternativas:

Contrastes multivariados: podemos construir una regla de decisión basada en los estadísticos multivariados, la tabla **Contrastes Multivariados**, pues no los afecta el incumplimiento de esfericidad. En nuestro caso, el $p - valor$ asociado a los contrastes multivariados son todos iguales a 0.077 mayor que α, así, no podemos rechazar la hipótesis nula de igualdad de diferencias y concluir que las diferencias entre las calificaciones es la misma en los tres momentos temporales definidos por el factor *tiempo*.

Estadístico univariado F: la tabla **Efectos intra-sujetos** reporta el índice de corrección épsilon, el cual expresa el grado en que la matriz de varianza-covarianzas se aleja de la esfericidad. La tabla reporta dos estimaciones de *épsilon*: *Greenhouse-Geisser* (G-G) y *Huynh-Feldt*(H-F), ambos son estimadores conservadores, un tercer estimador es el del límite inferior (L-I).

Fuente		SS(III)	G.L	MS	F	Sig
Tiempo						
	Esfericidad asumida	54.700	2	27.350	3.221	0.051
	Greenhouse-Geisser	54.700	2	28.793	3.221	0.054
	Huynh-Feidt	54.700	2	27.350	3.221	0.051
	Límite inferior	54.700	1	54.700	3.221	0.089
Error						
	Esfericidad asumida	322.633	38	8.490		
	Greenhouse-Geisser	322.633	36	8.938		
	Huynh-Feidt	322.633	38	8.490		
	Límite inferior	322.633	19	16.981		

Tabla 8.9: Efectos intra-sujetos

Los valores del $p-valor$ son mayores que α, ya sea en el caso de asumir esfericidad, como en las correcciones, no podemos rechazar la hipótesis de igualdad de las diferencias, y concluir que las calificaciones satisfacen la condición de esfericidad en los tres lapsos académicos.

Por defecto, el procedimiento *Modelo lineal general: Medidas repetidas*, efectúa un contraste de tipo *polinómico* a los factores con medidas repetidas, que permite estudiar el tipo de relación existente entre el factor y la variable dependiente, como el factor del modelo estudiado, posee tres niveles, entonces el reporte informa a cerca de la significancia de contrastes lineales y cuadrático en la tabla **Pruebas de Contrastes intra-sujetos**

Fuente	Tiempo	SS(III)	G.L	MS	F	Sig
Tiempo						
	Lineal	42.025	1	42.025	5.766	0.027
	Cuadrático	12.675	1	12.675	1.308	0.267
Error						
	Lineal	138.475	19	7.288		
	Cuadrático	184.158	19	9.693		

Tabla 8.10: Pruebas de Contrastes intra-sujetos

La tabla recoge, para cada contraste, la información necesaria para contrastar la hipótesis nula de que el polinomio o componente evaluado vale cero en la población. Basándose en los $p - valores$ asociados a cada estadístico F podemos rechazar la hipótesis nula referente al componente lineal, $0{,}027 < \alpha = 0{,}05$, por tanto las medias de las calificaciones en cada lapso académico no se ajustan a una linea recta, como se ilustra en el gráfico de perfiles.

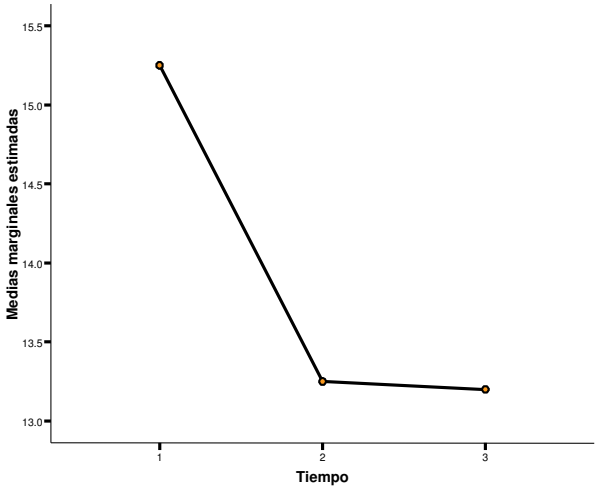

Figura 8.5: Gráfico de perfiles

El $p - valor$ asociado al contraste cuadrático es igual a 0.267 valor que supera el nivel de significancia fijado en el ensayo, razón por la cual se acepta la hipótesis nula del contraste de tendencia cuadrática.

La tabla **Pruebas de los efectos inter-sujetos** reporta el contraste de los efectos inter-sujetos. En un diseño de un solo factor intra-sujetos el único efecto intersujetos es el referido a la media global.

El estadístico F permite efectuar el contrastar de hipótesis

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 0 \\ H_1 &: \mu \neq 0 \end{aligned}$$

puesto que el $p - valor$ es igual a 0.000, entonces al nivel del 5 % se rechaza H_0, en conclusión la media global es significativamente distinta de cero.

Fuente	SS(III)	G.L	MS	F	Sig.
Interseción1	11592.600	1	11592.600	1429.037	0.000
Error	154.067	9	8.109		

Tabla 8.11: Efectos inter-sujetos

La tabla **Medias estimadas** ofrece para cada nivel del factor *Tiempo* la media estimada, el error típico de estimación y el intervalo de confianza para la media al 95 % .

			Intervalo de confianza al 95 %	
Tiempo	Media	Error	Limite inferior	Limite superior
1	15.250	0.598	13.999	16.501
2	13.250	0.725	11.733	14.767
3	13.200	0.610	11.924	14.476

Tabla 8.12: Medias estimadas

Se observa similitud aparente entre las calificaciones del segundo y tercer lapso, ya que la diferencia entre la medias estimadas es de 0.050, ambas diferentes a las del primer lapso, la diferencia es de 2.000 y 2.050 respectivamente. Para establecer si las diferencias aparentes son estadísticamente significativas o no, es necesario efectuar comparaciones por pares entre los niveles del factor tiempo.

La tabla **Comparaciones por pares** reporta el $p - valor$ de las comparaciones múltiples entre los tres niveles del factor *Tiempo* mediante la corrección de Bonferroni, para controlar la tasa de error o probabilidad de cometer errores del tipo I.

Observando el $p - valor$ asociado a cada comparación, vemos que únicamente existen diferencias significativas entre el nivel 1 y el nivel 3 del factor tiempo al nivel de significancia del 5 %. Por otra parte, durante el primer lapso se alcanzaron mayores calificaciones que en los dos otros lapsos académicos, ya que las diferencias entre el promedio del primer lapso y los promedios de sus pares son todas positivas; este valor desciende hasta alcanzar el mínimo valor en el tercer lapso.

					IC al 95 %	
Tiempo(I)	Tiempo(J)	Medias(I-J)	Error	Sig.	Límite inferior	Límite superior
1	2	2.000	1.021	0.065	-0.137	4.127
	3	2.050	0.854	0.027	0.263	3.837
2	1	-2.000	1.021	0.065	-4.137	0.137
	3	0.050	0.881	0.955	-1.794	1.894
3	1	-2.050	0.854	0.027	-3.837	-0.263
	2	-0.050	0.881	0.955	-1.894	1.794

Tabla 8.13: Comparaciones por pares

El descenso de las medias en los tres niveles del factor tiempo, corrobora al diagrama de perfiles, en el cual se observa la existencia de pendiente negativa en el perfil, además de un comportamiento estacionario en los dos últimos lapsos.

Problema 8.2 *Un investigador clínico, a un grupo de diez sujetos les hace memorizar durante 20 minutos dos listas distintas: una de palabras y otra de cantidades numéricas. Más tarde, al cabo de una hora, de un día, de una semana y de un mes, se les pide que intenten memorizar ambas listas. Un panel de expertos evalúa la calidad del recuerdo de cada sujeto hasta elaborar la tabla de datos siguientes. Existen efectos significativos al 5 % producto del factor tiempo, del contenido de las listas o de la interacción de los niveles de los factores?*

	Hora		Día		Semana		Mes	
Individuo	#	Palabras	#	Palabras	#	Palabras	#	Palabras
1	6	8	6	6	3	4	2	3
2	7	10	5	8	5	5	5	2
3	4	7	2	7	1	2	3	2
4	7	11	5	9	3	3	4	6
5	6	10	4	6	4	4	5	3
6	5	9	2	4	1	3	1	5
7	7	10	5	8	5	5	5	2
8	4	7	2	7	1	2	3	2
9	7	11	5	9	3	3	4	6
10	6	10	4	6	4	4	5	3

Solución

El interés del investigador se centra en averiguar si existen diferencias en la calidad del recuerdo dependiendo del *paso del tiempo* (una hora, un día, una semana, un mes) y del contenido de lo que se memoriza (cantidades o palabras). Se trata de un diseño con dos factores con medidas repetidas: *Tiempo* con cuatro niveles y *Contenidos* con dos niveles y una variable dependiente *Calidad del recuerdo* evaluada por un panel de expertos.

Para realizar el análisis es necesario crear 8 variables:

$Horan$	:	una hora, lista de cantidades nivel 1,1
$Horap$	:	una hora, lista de palabras nivel 1,2
$Dian$	:	un día, lista de cantidades nivel 2,1
$Diap$	:	un día, lista de palabras nivel 2,2
$Semanan$	:	una semana, lista de cantidades nivel 3,1
$Semanap$	:	una semana, lista de palabras nivel 3,2
$Mesn$	:	un mes, lista de cantidades nivel 4,1
$Mesp$	:	un mes, lista de palabras nivel 4,2

cuyos valores son los datos contenidos en la tabla anterior.

Al ejecutar la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo Lineal General  --> Medidas repetidas
```

y seleccionar los campos siguientes:

```
Factor1: Tiempo
   Niveles: 4
  Añadir
Factor2: Contenidos
   Niveles: 2
  Añadir
Definir
Variables intra-sujeto (Tiempo.Contenido)
       HoraN
       HoraP
       DiaN
       DiaP
       SemanaN
       SemanaP
       MesN
       MesP
```

```
Gráficos: Gráficos de perfil
     Eje horizontal: Tiempo
     Líneas distintas: Contenido
     Añadir
   Continuar
Opciones
   Mostrar las medias para: Tiempo
     Comparar los efectos principales
      Ajuste del intervalo de confianza: Bonferroni
   Continuar
Aceptar
```

Los cuales generan el reporte completo asociado al procedimiento Diseños con medidas repetidas en dos factores.

Para el contraste de hipótesis relacionado con la condición de esfericidad de la matriz de varianza-covarianzas, la tabla **Prueba de esfericidad de Mauchly** ofrece el estadístico W de Mauchly, para cada uno de los efectos presentes en el modelo. Puesto que el $p-valor$ asociado al esatdístico W es mayor que 0.05 en todos los casos de comparaciones posibles. El $p-valor$ referido al factor *Contenidos*, no aparece, porque, con dos niveles no tiene sentido hablar de esfericidad, con dos niveles sólo existe una covarianza que, obviamente, es igual a sí misma.

					Epsilon		
Efecto	W de Mauchly	χ^2	G.L	Sig	G-G	H-F	L.I
Tiempo	0.497	5.395	5	0.373	0.768	1.000	0.333
Contenido	1.000	.000	0		1.00	1.000	1.000
Interacción	0.317	8.869	5	0.117	0.582	0.710	0.333

Tabla 8.14: Prueba de esfericidad de Mauchly

En otras palabras, no existen evidencias significativas aportadas por la muestra para rechazar la hipóteis nula de esfericidad de la matriz de varianzas-covarianzas, al nivel de significancia del 5 %.

Por otra parte, la tabla **Contraste multivariados** ofrece cuatro estadísticos multivariados para poner a prueba cada una de las tres hipótesis nulas de interés en este tipo de diseño:

- En primer lugar, ya que el $p-valor$ asociado al efecto del factor *Tiempo* es 0.000 menor que $\alpha = 0{,}05$, podemos rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias referidas a este factor y concluir que la *calidad del recuerdo* no es la misma en los cuatro momentos temporales empleados

en el estudio. En otras palabras, existen diferencias estadísticas en la calidad del recuerdo, cuando la evaluación de la capacidad de recordar las listas se realiza una hora, un día, una semana o un mes después de haber iniciado el estudio.

- De manera similar, como el $p - valor$ asociado al efecto del factor *Contenidos* es menor que 0.05, podemos rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias referidas al factor *Contenido* y concluir que la *Calidad del recuerdo* no es la misma en las dos listas utilizadas, es decir, la calidad del recuerdo depende si la lista considerada contiene palabras o cantidades numéricas.

- Finalmente, el $p - valor$ asociado al efecto de la interacción *Tiempo*Contenido* es menor que α podemos rechazar la hipótesis nula referida al efecto significativo de la interacción. La calidad del recuerdo varia si la evaluación se efectúa sobre la lista de palabras en una hora, un día, una semana o un mes, al igual que para la lista de cantidades numéricas.

Las conclusiones anteriores son aplicables en el caso de asumir esfericidad o no, como se observa en la tabla 8.15

Efecto		Valor	F	G.L Hipót	G.L Error	Sig
Tiempo						
	Traza de Pillai	0.99	189.56	3	7	0.000
	Traza de Wilks	0.01	189.56	3	7	0.000
	Traza de Hotelling	81.24	189.56	3	7	0.000
	Raíz mayor de Roy	81.24	189.56	3	7	0.000
Contenido						
	Traza de Pillai	0.81	38.29	1	9	0.000
	Traza de Wilks	0.19	38.29	1	9	0.000
	Traza de Hotelling	4.25	38.29	1	9	0.000
	Raíz mayor de Roy	4.25	38.29	1	9	0.000
Interacción						
	Traza de Pillai	0.89	18.75	3	7	0.001
	Traza de Wilks	0.11	18.75	3	7	0.001
	Traza de Hotelling	8.03	18.75	3	7	0.001
	Raíz mayor de Roy	8.04	18.75	3	7	0.001

Tabla 8.15: Contrastes multivariados

En el resumen de la tabla **Efectos intra-sujetos** se muestra los estadísticos F univariados asociados a cada efecto. Al igual que ocurría en la aproximación multivariada, el $p-valor$ asociado a los tres contrastes de interés nos lleva al rechazo de la hipótesis nula referida a los factores *Tiempo* y *Contenido*, así, como al efecto de la interacción de los factores anteriores.

Para los tres contraste intrasujetos, se reportan las pruebas basadas en el estadístico F en los casos en que:

- Se asuma esfericidad
- Se opte por la corrección de Huynh-Feldt
- Se acepte la correción de Greenhouse-Geisser
- Se acepte la corrección del límite inferior

En cualquiera de los cuatro escenarios, el $p-valor$ asociado al estadístico de prueba F es menor que el nivel de significancia considerado, es decir, se rechaza la hipótesis nula para los efectos principales de los dos factores intrasujetos, así, como para la interacción de los niveles de ellos.

Fuente		SS(III)	G.L	MS	F	Sig.
Tiempo	Esfericidad asumida	243.45	3	81.10	72.32	0.000
	Greenhouse-Geisser	243.45	2.3	105.60	72.31	0.000
	Huynh-Feldt	243.45	3	81.15	72.32	0.000
	Límite inferior	243.45	1	243.45	72.31	0.000
Error	Esfericidad asumida	30.30	27	1.12		
Contenido	Esfericidad asumida	54.45	1	54.45	38.29	0.000
	Greenhouse-Geisser	54.45	1	54.45	38.29	0.000
	Huynh-Feldt	54.45	1	54.45	38.29	0.000
	Límite inferior	54.45	1	54.45	38.29	0.000
Error	Esfericidad asumida	12.80	9	1.42		
Interacción	Esfericidad asumida	50.05	3	16.68	15.70	0.000
	Greenhouse-Geisser	50.05	1.8	28.66	15.70	0.000
	Huynh-Feldt	50.05	2.1	23.48	15.70	0.000
	Límite inferior	50.05	1.0	50.05	15.70	0.003
Error	Esfericidad asumida	28.70	27	1.06		

Tabla 8.16: Efectos intra-sujetos

El contraste de las hipótesis referidas a los tres efectos presentes en el modelo ANOVA de dos factores repetidos es sólo el primer paso del análisis; información complementaria adicional se obtiene mediante:

1. Un gráfico de perfil representando las medias de las casillas, para poder interpretar el efecto de la interacción en el caso de ser significativa.

2. Efectuar comparaciones múltiples entre las medias de los efectos significativos para identificar donde se producen las diferencias

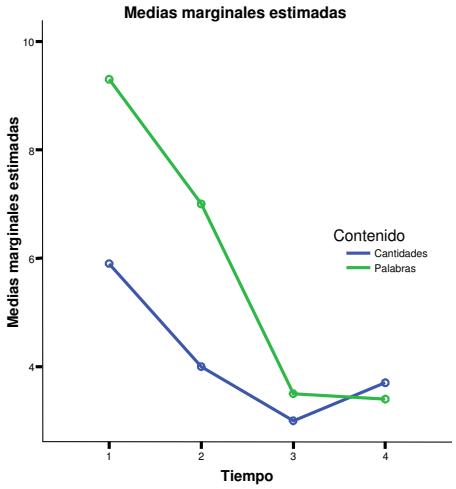

Figura 8.6: Gráfico de perfiles

En el gráfico de perfiles figura 8.6 se puede observar que la calidad del recuerdo va decreciendo con el paso del tiempo, pero solo hasta el tercer nivel: una semana; siempre la calidad del recuerdo de la lista palabras es mayor que en el caso de cantidades, en el cuanto nivel: un mes, la calidad del recuerdo de las palabras tiende a ser estacionario, mientras que para la lista de cantidades existe una ligera mejora. Sin embargo la diferencia entre ambas listas es más evidente al principio: una hora, un día que al final, una semana, un mes.

No obstante, para poder afirmar esto último, es decir, para poder interpretar correctamente el efecto de la interacción, es necesario efectuar comparaciones múltiples.

El reporte de comparaciones múltiples contiene dos tablas:

La tabla **Medias estimadas** reporta las medias marginales que el modelo estima para cada nivel del factor *Tiempo*, además del error típico y del intervalo de confianza correspondiente a cada media:

			Intervalo de confianza al 95 %	
Tiempo	Media	Error	Limite inferior	Limite superior
1	7.660	0.414	6.664	8.536
2	5.500	0.415	4.505	6.439
3	3.250	0.410	2.323	4.177
4	3.550	0.302	2.866	4.234

Tabla 8.17: Medias estimadas

Los valores estimados para las medias del factor *Tiempo* en sus cuatro niveles, muestran aparentes diferencias al comparar dos a dos los valores. Para discernir si existen o no diferencias significativas en tres los pares de medias es necesario analizar la información contenida en la tabla **Comparaciones por pares**. La cual muestra las comparaciones por pares entre los niveles del factor *Tiempo*; para controlar la tasa de error, tanto los $p-valores$ como los intervalos de confianza están ajustados mediante la corrección de Bonferroni. El resultado de las comparaciones indica diferencias significativas entre todos los niveles. La *Calidad del recuerdo* en el primer nivel: una hora, es significativamente mejor que los niveles restantes. En el segundo nivel la *calidad del recuerdo* es significativamente superior a los niveles 3 y 4, una semana y un mes. Para el tercer nivel se observa que la *Calidad del recuerdo* es inferior a los niveles dos y tres, mientras que es semejante al nivel cuatro. Los intervalos de confianza permiten obtener las mismas conclusiones.

					IC al 95 %	
Tiempo(I)	Tiempo(J)	Medias(I-J)	Error	Sig.	Límite inferior	Límite superior
1	2	2.100	0.314	0.001	1.042	3.158
	3	4.350	0.308	0.000	3.315	5.385
	4	4.050	0.217	0.000	3.321	4.779
2	1	-2.100	0.314	0.001	-3.158	-1.042
	3	2.250	0.382	0.001	0.965	3.535
	4	1.950	0.337	0.002	0.816	3.084
3	1	-4.350	0.308	0.000	-5.385	-3.315
	2	-2.250	0.382	0.001	-3.535	-0.965
	4	-3.000	0.416	1.000	-1.701	1.101
4	1	-4.050	0.217	0.000	-4.779	-3.231
	2	-1.950	0.337	0.002	-3.084	-0.816
	3	0.300	0.416	1.000	-1.101	1.701

Tabla 8.18: Comparaciones por pares

El procedimiento **Medidas repetidas** permite también contrastar los *efectos simples*, es decir, permite comparar entre si los niveles de un factor dentro de cada nivel del otro factor, los cual es especialmente útil para interpretar el efecto de la interacción, mediante la ejecución de comandos de sintaxis de SPSS.

Los comandos de sintaxis necesarios en este caso son:

- En el cuadro de diálogo *Medidas repetidas*: **Opciones** seleccionar el efecto que contiene la interacción *Tiempo*Contenido* y el factor *Tiempo*, trasladar a campo: **Mostrar medias para:**.
- Seleccione el comando: **Comparar los efectos principales; Ajuste de intervalos de confianza:** *Bonferroni*.
- Active el comando *Pegar* para editar una ventana de sintaxis correspondiente a las selecciones efectuadas y modificar la línea:

```
/EMMEANS = TABLAS (Tiempo*Contenidos)
```

añadiéndole *COMPARE(CONTENIDO)ADJ(BONFERRONI)* quedando finalmente como:

```
/EMMEANS = TABLAS (Tiempo*Contenidos)
  COMPARE(CONTENIDO)ADJ(BONFERRONI)
```

Las especificaciones anteriores permiten obtener dos nuevas tablas: la primera tabla **Medias estimadas** ofrece las medias que el modelo estima para cada casilla, es decir, para cada nivel del factor *Contenido* en cada nivel del factor *Tiempo*.

- En el nivel 1 *una hora* los valores estimados aparentemente son distintos en los dos listas, para la lista de cantidades el valor promedio de la calidad del recuerdo es de 5.900, mientras que para la lista de palabras el promedio fue 9.300, la diferencia entre ambos valores podría, ser significativa.
- De igual manera, en el nivel 2 *un día* las diferencias en las dos listas se puede asumir, dado que el promedio de la lista de cantidades es de 4.00 y mientras que para la lista de palabras es de 7.00.
- En los niveles tres *una semana* y en el nivel 4 *un mes* no existen diferencias aparentes en la calidad del recuerdo de las dos listas propuestas,

en el nivel 3 la diferencia entre los valores promedios es de 0.50, mientras que en el nivel 4 la diferencia es de 0.30 a favor de la lista de cantidades. Es de hacer notar que sólo en el nivel 4 el promedio de cantidades supera al promedio de palabras recordadas por los individuos que participan en el ensayo

Además de los valores estimados para la media, la tabla reporta el error típico de estimación y los extremos de cada intervalo de confianza al 95 % para las estimaciones. Es de hacer notar, que la longitud de los intervalos de confianza al 95 % son relativamente pequeñas, no mayores a 3.2, lo cual garantiza buena presición de las estimaciones.

				Intervalo de confianza al 95 %	
Tiempo	Contenido	Media	Error	Limite inferior	Limite superior
1	1	5.900	0.379	5.044	6.756
	2	9.300	0.473	8.231	10.369
2	1	4.00	0.473	8.231	5.066
	2	7.00	0.494	5.882	8.116
3	1	3.000	0.494	1.882	4.118
	2	3.500	0.342	2.727	4.273
4	1	3.70	0.448	2.686	4.714
	2	3.40	0.521	2.222	4.578

Tabla 8.19: Medias estimadas

La tabla **Comparaciones por pares** recoge las comparaciones entre cada nivel del factor *Contenido* dentro de cada nivel del factor *Tiempo*; con el fin de controlar la tasa de error, probabilidad de cometer errores del tipo I, tanto los $p - valores$, como los intervalos de confianza, está ajustados mediante la corrección de Bonferroni.

La tabla **Comparaciones por pares** muestra que el recuerdo medio de cantidades y de palabras difiere significativamente en los primero momentos temporales: una hora y un día; pero en los dos últimos momentos: una semana y un mes, no existen diferencias significativas. Durante el nivel temporal de una hora, las palabras recordadas superan significativamente al 1 % a la lista de cantidades.

Transcurrida una semanal un día las diferencias se mantienen altamente significativas al 1 %, aun cuando la diferencia de las medias disminuye, manteniéndose el promedio de palabras recordadas por encima de las cantidades.

En los instantes posteriores, considerados en el ensayo no se observan diferencias significativas, ya que el $p - valor$ de las pruebas es superior al

						IC al 95 %	
	Conten	Conten	Medias			Límite	Límite
Tiempo	(I)	(J)	(I-J)	Error	Sig.	inferior	superior
1	1	2	-3.4	0.221	0.000	-3.9	-2.9
	2	1	3.4	0.221	0.000	2.9	3.9
2	1	2	-3.0	0.494	0.000	-4.12	-1.9
	2	1	3.0	0.494	0.000	1.9	4.19
3	1	2	-0.5	0.224	0.652	-1.09	0.09
	2	1	0.5	0.224	0.052	-0.09	1.09
4	1	2	0.3	0.761	0.703	-1.42	2.02
	2	1	-0.3	0.761	0.703	-2.02	1.42

Tabla 8.20: Comparaciones por pares

nivel de significancia, las posibles diferencias observadas en la tabla de medias transcurrido una semana y un mes son producto del azar.

La conclusión anterior viene a corroborar lo observado al analizar el diagrama de perfiles.

El modelo que ahora nos ocupa permite analizar datos provenientes de un diseño de dos factores con medidas repetidas en uno de ellos. Tenemos por tanto, un factor inter-sujetos, con un grupo de sujetos en cada nivel, y un factor intra-sujetos, por cuyos niveles pasan todos los sujetos.

Problema 8.3 *Se ha observado que el insomnio es uno de los síntomas asociados a determinados trastornos de ansiedad. Para apaciguarlo, en un gabinete Psicológico se propone una terapia para aumentar el número de horas dormidas. Se selecciona una muestra aleatoria de 20 sujetos y se observa el número de horas dormidas por los sujetos en tres noches consecutivas.*

Los datos recogidos en las variables: Noche1, Noche2 y Noche3*, indican el número de horas dormidas en las tres noches, además se ha medido otras dos variables:* Sexo *que toma valores 0 para mujeres y 1 para hombres,* Edad *con valores 1 para los sujetos menores de 20 años, 2 para los sujetos entre 20 y 25 años y 3 para los sujetos mayores de 25 años. La información obtenida del ensayo se resume en la tabla siguiente. Existen diferencias significarías en las horas dormidas en los grupos de edad considerados al nivel del 5 % de significancia?.*

Noche1	Noche2	Noche3	Sexo	Edad
4.00	4.50	5.00	0	1
5.80	6.40	7.00	1	2
4.10	4.90	5.10	0	3
4.30	5.00	5.60	1	1
5.40	6.10	6.30	0	2
5.70	6.30	6.80	1	3
4.30	4.80	5.40	0	1
7.60	7.90	8.60	1	2
5.70	6.00	6.70	0	3
3.80	4.60	4.90	1	1
7.70	8.00	8.50	0	2
6.40	7.00	7.30	1	3
4.00	4.50	5.0	0	1
7.70	8.10	8.50	1	2
6.40	6.90	7.30	0	3
5.90	6.60	7.00	1	1
7.20	7.80	8.10	0	2
5.60	6.20	6.80	1	3
5.70	6.10	6.80	0	1
7.40	7.60	8.20	1	2

Solución

Se trata, por tanto de un diseño de dos factores: un factor inter-sujetos al que denominaremos *Horas dormidas* con tres niveles: Noche1, Noche2 y Noche3, y un factor intra-sujetos *Edad* con tres niveles definidos por los tres segmentos de edad considerados por los psicológos, como variable dependiente consideraremos las *horas dormidas*.

Para correr el diseño de dos factores con medidas repetidas en un solo factor debemos:

1. Contrastar las hipótesis nulas referidas a los tres efectos presentes en el modelo
2. Obtener información adicional basada en aspectos complementarios como
   - Pruebas de homogeneidad
   - Gráficos de perfil
   - Comparaciones múltiples

Para tal fin ejecutamos la secuencia de comandos:

```
Analizar  --> Modelo Lineal General  --> Medidas repetidas
```

En la caja de diálogo asociada seleccionamos los campos:

```
Definir factor de medidas repetidas: Horas
     Número de niveles: 3
  Añadir
Definir
Variables intra-sujeto
 Noche1(1,1)
 Noche2(1,2)
 Noche3(1,3)
Variable inter-sujeto: Edad
Gráficos:
  Gráficos de perfil:
        Eje horizontal: Horas
        Líneas distintas: Edad
  Continuar
Opciones:
    Pruebas de homogeneidad
    Mostrar las medias para: Edad, Horas*Edad
       Comparar efectos principales
       Ajuste del intervalo de confianza: Bonferroni
      Continuar
 Aceptar
```

A continuación analizaremos las tablas más importantes generadas en el reporte del SPSS, algunas tablas son similares a las estudiadas en los ejemplos anteriores.

Iniciamos el análisis del reporte con la tabla **Prueba de esfericidad de Mauchly**, como el $p-valor$ asociado al contraste de esfericidad de Mauchly es igual a 0.318 mayor que $\alpha = 0{,}05$ no existen evidencias estadísticas aportadas por la muestra para rechazar la hipótesis nula de esfericidad de la matriz de varianza-covarianzas al nivel del 5 %.

Efecto Intra-sujetos	W de Mauchly	χ^2	G.L	Sig	Epsilon G-G	Epsilon H-F	Epsilon L.I
Horas	0.867	2.288	5	0.318	0.882	1.000	0.500

Tabla 8.21: Prueba de esfericidad de Mauchly

En otras palabras, la matriz de varianza-covarianzas, es una matriz del tipo H, luego satisface la condición de Huynh-Feldt al nivel de significancia del 5 %.

Puesto que $p - valor > \alpha$ se asume esfericidad y en consciencia, las decisiones a cerca de los efectos intra-sujetos, se toman considerando la aproximación univariada contenida en la tabla **Efectos intra-sujetos**.

Fuente		SS(II)	G.L	MS	F	sig
Horas	Esfericidad asumida	10.2	2.0	5.08	427.02	0.000
	Greenhouse-Geisser	10.2	1.9	5.76	427.02	0.000
	Huynh-Feldt	10.2	2.0	5.08	427.02	0.000
	Límite inferior	10.2	1.0	10.16	427.02	0.000
Horas*Edad	Esfericidad asumida	0.1	4.0	0.02	1.53	0.216
	Greenhouse-Geisser	0.1	3.5	0.02	1.53	0.223
	Huynh-Feldt	0.1	4.0	0.01	1.53	0.216
	Límite inferior	0.1	2.0	0.04	1.54	0.245
Error(Horas)	Esfericidad asumida	0.4	34	0.01		
	Greenhouse-Geisser	0.4	30	0.01		
	Huynh-Feldt	0.4	34	0.01		
	Límite inferior	0.4	17	0.02		

Tabla 8.22: Efectos intra-sujetos

La información relativa al efecto individual del factor *Horas* es consistente con la obtenida con la aproximación multivariada; tanto si asumimos esfericidad, como si no la asumimos, utilizando cualquiera de los correctores épsilon, el $p - valor$ es tan pequeño, que podemos rechazar la hipótesis nula referida al factor *Horas*, es decir, podemos afirmar que el efecto del factor *Horas* es significativo y concluir que las horas dormidas en las tres noches consecutivas nos son las mismas.

En cuanto, al efecto de la interacción *Horas*Edad*, tanto si se asume o no la esfericidad el $p - valor$ asociado al contraste es mayor que α, podemos concluir que no existen efectos significativos de la interacción.

La tabla **Efectos inter-sujetos** reporta información referente al factor inter-sujeto: *Edad*, el $p - valor$ asociado al estadístico F es igual a 0.000, permite rechazar la hipótesis nula y afirmar que el efecto del factor *Edad* es significativo al nivel del 5 %, es decir, podemos concluir que las *Horas dormidas* no son iguales en las tres categorías del factor *Edad* consideradas en el diseño en estudio.

En un ANOVA factorial mixto o *split-plot*; un factor inter-sujetos y un factor intra-sujetos como en que se estudia, además del supuesto de esfe-

Fuente	SS(III)	G.L	MS	F	Sig
Intersección	2327.666	1	2327.666	1073.236	0.000
Edad	55.214	2	27.607	12.729	0.000
Error	36.869	17	2.169		

Tabla 8.23: Efectos inter-sujetos

ricidad, debe establecerse un supuesto adicional: las matrices de Varianza-Covarianzas de los niveles del factor intra-sujetos deben ser iguales en cada uno de los niveles del factor intra-sujetos.

La Tabla **Prueba de Box**, ofrece el valor del estadístico M de Box y su transformación en F, que permite contrastar la hipóteis nula de igualdad de las matrices de varianzas-covarianzas, como el $p-valor$ asociado al estadístico de contraste es mayor que α, permite no rechazar la hipótesis nula, es decir, se puede afirmar que las matrices de varianzas-covarianzas observadas de las variables dependientes son iguales en todos los grupos definidos por los niveles del factor inter-sujetos al nivel de significancia del 5 %.

M de Box	F	G.L1	G.L2	Sig
5.417	0.331	12	1310.409	0.984

Tabla 8.24: Prueba de Box

Por otra parte, la tabla **Contraste de Levene**, reporta el contraste de hipótesis de igualdad de la varianza de la variable dependiente en cada uno de los nieles del factor intra-sujeto, en nuestro caso, el $p-valor$ asociado al estadístico de prueba en cada nivel del factor intra-sujetos es mayor que α, por lo tanto no podemos rechazar la hipótesis de igualdad de varianzas en ninguna de las tres medidas utilizadas: *Noche1,Noche2,Noche3*.

	F	G.L1	G.L2	Sig
Noche1	0.436	2	17	0.654
Noche2	0.277	2	17	0.762
Noche3	.292	2	17	0.750

Tabla 8.25: Prueba de Levene

Cuando se analizó la tabla de **Efectos intra-sujetos** se concluyo que la interacción de los factores *Horas dormidas* y *Edad* no era significativo para

el número de horas dormidas por los sujetos en las tres noches del estudio, tal conclusión puede ser corroborada por el gráfico de perfiles.

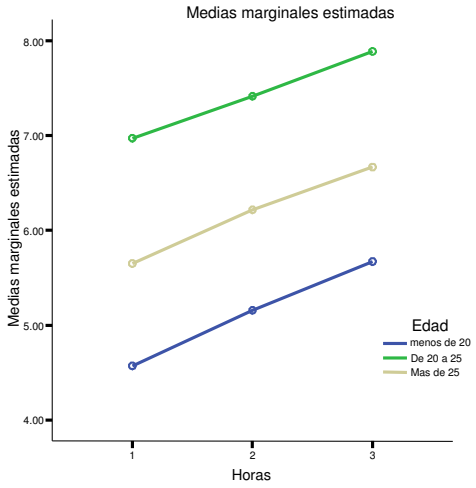

Figura 8.7: Gráfico de perfiles

El gráfico de perfiles ilustrado en la figura 8.7 muestra con claridad que las horas dormidas muestran una tendencia lineal creciente al pasar cada noche. También puede observarse, que el crecimiento de las horas dormidas no es igual en los tres niveles definidas por el vector *Edad*. Parece claro que en el grupo de sujetos con edad comprendida entre 20 y 25 años se logra dormir mayor número de horas por noche que en los otros dos grupos de edad.

De igual manera, se puede observar que el grupo de edad con menor número de horas dormidas durante las tres noches del estudio corresponde a las personas con edades menores de 20 años.

No obstante, para poder interpretar de manera apropiada el efecto de la interacción es necesario efectuar comparaciones múltiples.

Para efectuar comparaciones múltiples debemos seguir estrategias distintas dependiendo de que se intente evaluar un efecto inter-sujeto o un efecto intra-sujeto.

Para evaluar un efecto inter-sujetos podemos utilizar opciones del comando *Post hoc*. mientras que, por el contrario, las comparaciones múltiples referidas a los efectos intra-sujetos, deben obtenerse utilizando la opción **Comparar efectos principales** del campo *Opciones* y mediante comandos de sintaxis. El comando de sintaxis utilizado en el menú **Medidas Repetidas** es:

```
GLM
 Noche1 Noche2 Noche3 BY Edad
 /WSFACTOR = Horas 3 Polynomial
 /METHOD = SSTYPE(3)
 /POSTHOC = Edad ( TUKEY )
 /PLOT = PROFILE( Horas*Edad )
 /EMMEANS = TABLES(Edad) COMPARE ADJ(BONFERRONI)
/EMMEANS = TABLES(Edad*Horas)COMPARE (edad)ADJ(BONFERRONI)
/EMMEANS = TABLES(Horas) COMPARE ADJ(BONFERRONI)
/PRINT = HOMOGENEITY
/CRITERIA = ALPHA(.05)
/WSDESIGN = Horas
/DESIGN = Edad .
```

El comando *Post hoc* reporta la tabla **Comparaciones por pares**, en la cual mediante el ajuste de Bonferroni se comparan dos a dos las media de los niveles del factor inter-sujetos *Edad*, en esta tabla se observa que el único $p - valor$ asociado al contraste de pares de medias menor que 0.05, es el asociado al par de medias de los grupos menos de 20 años y de 20 a 25 años, es decir, sólo en estos grupos las diferencias de las medias son significativas al 5 %, diferencias en otros grupos son producto del azar.

La tabla **Comparaciones por pares factor: Horas** ofrece las comparaciones por pares entre los niveles del factor *Horas*, usando el ajuste de Bonferroni para controlar la tasa de error tipo I, los $p - valores$ como los niveles de confianza son ajustados de esta manera.

					IC al 95 %	
Horas(I)	Horas(J)	Medias(I-J)	Error	Sig	Límite inferior	Límite superior
Noche1	Noche2	-0.532	0.030	0.000	-0.611	-0.452
	Noche3	-1.010	0.028	0.000	-1.068	-0.452
Noche2	Noche1	0.532	0.038	0.000	0.452	0.611
	Noche3	-0.479	0.028	0.000	-0.558	-0.399
Noche3	Noche1	1.010	0.028	0.000	0.952	1.068
	Noche2	0.474	0.038	0.000	0.399	0.558

Tabla 8.26: Comparaciones por pares factor: Horas

Al analizar la tabla se observó:

- Dado que el $p - valor$ asociado a todos los contrastes es 0.000 menor que α, es decir, no existen evidencia estadísticas para no rechazar la

hipótesis nula de igual número de horas dormidas en la tres noches del ensayo.

- En la tercera noche se observa mayor número de horas dormidas que en las dos primeras noches, mientras que en la segunda noche los pacientes lograron dormir mayor número de horas que el primer día del estudio.

- Durante la primera noche del ensayo los sujetos durmieron menos horas que en las dos noches restantes.

La tabla **Comparaciones múltiples: Edad** reporta las comparaciones múltiples del factor inter-sujetos *Edad*, al leer el $p - valor$ asociado a los contraste por pares, se observa:

- que el grupo de individuos de 20 a 25 años presenta diferencias significativas con los grupos restantes, los cuales presentan valores medios similares, formándose dos grupos significativos de individuos al 5 %.

- el primer grupo lo conforman las personas menores de 20 años y las mayores de 25 años, el otro grupo lo conforman los individuos con edad entre 20 y 25 años.

- el grupo de personas con menor de 20 años se caracterizan por dormir menos horas durante el ensayo, mientras que el grupo de personas con edad entre 20 y 25 años, duermen mayor número de horas, lo cual corrobora las observaciones generadas del gráfico de perfiles, en el cual la línea del grupo de edad menos de 20 años está ubicada en la parte inferior del gráfico, mientras que el segundo grupo de edades se ubica en la parte superior.

					IC al 95 %	
Edad(I)	Edad(J)	Medias(I-J)	Error	Sig	Límite inferior	Límite superior
< 20	20 a 25	-2.290	0.454	0.000	-3.456	-0.112
	> de 25	-1.044	0.473	0.098	-2.257	0.169
20 a 25	< 20	2.290	0.454	0.000	1.124	3.456
	> 25	1.246	0.473	0.044	0.0325	2.459
> 25	< 20	1.044	0.473	0.098	-0.169	2.258
	20 a 25	-1.246	0.473	0.044	-2.459	-0.032

Tabla 8.27: Comparaciones por pares factor: Edad

La tabla **Comparaciones por pares: Horas*Edad** reporta las comparaciones por pares de los diferentes grupos de edades, de las horas dormidas en cada uno de los tres días del ensayo. Su objetivo es establecer la interacción de los niveles de los factores intrasujetos e intersujetos

						IC al 95 %	
			Diferencia			Límite	Límite
Horas	Edad(I)	Edad(J)	(I-J)	Error	Sig	inferior	superior
1	Edad1	Edad2	-2.400	.476	.000	-3.665	-1.135
		Edad3	-1.079	.496	.132	-2.395	.238
	Edad2	Edad1	2.400	.476	.000	1.135	3.665
		Edad3	1.321	.496	.049	.005	2.638
	Edad3	Edad1	1.079	.496	.132	-.238	2.395
		Edad2	-1.321	.496	.049	-2.638	-.005
2	Edad1	Edad2	-2.257	.433	.000	-3.407	-1.108
		Edad3	-1.060	.451	.093	-2.256	.137
	Edad2	Edad1	2.257	.433	.000	1.108	3.407
		Edad3	1.198	.451	.050	.001	2.394
	Edad3	Edad1	1.060	.451	.093	-.137	2.256
		Edad2	-1.198	.451	.050	-2.394	-.001
3	Edad1	Edad2	-2.214	.460	.000	-3.437	-.992
		Edad3	-.995	.479	.160	-2.268	.277
	Edad2	Edad1	2.214	.460	.000	.992	3.437
		Edad3	1.219	.479	.063	-.053	2.492
	Edad3	Edad1	.995	.479	.160	-.277	2.268
		Edad2	-1.219	.479	.063	-2.492	.053

Tabla 8.28: Comparaciones por pares: Horas*Edad

Durante la primera noche del ensayo se observó que los individuos de menor edad durmierón menos horas que los otros grupos de edad, las diferencias de medias de las horas dormidas son menores que cero, al leer el $p - valor$ del constaste de hipótesis se observa que el grupo de 20 años a 25 años presentan diferencias significativas al 5 %, con los grupos restantes, durante el primer día del ensayo.

Al segundo día del ensayo se observo que los grupos de edad menor a 20 años y el grupo de 20 a 25 años presentan diferencias significativas al 5 %, en el promedio de horas dormidas.

Al tercer día de ensayo sólo los grupos con diferencias al segundo día se mantienen iguales. Por otra parte, es de hacer notar que el grupo de personas

con edades comprendidas entre 20 y 25 años, lograrón dormir mayor número de horas que los otros grupos en cada uno de los tres días del ensayo.

Capítulo 9

Modelos de regresión lineal

9.1. Introducción

Cuando el interés de la investigación está centrado en la existencia de una relación lineal entre una variable dependiente y una o más variables independientes, es necesario utilizar técnicas estadísticas que facilitan interpretar los resultados y de esta manera poder llegar a conclusiones verdaderas que permitan al investigador rechazar o no rechazar las hipótesis de relación lineal inicialmente plantada e inclusive formular nuevas hipótesis, una de estas técnicas estadísticas, de gran utilidad es el análisis de modelos de regresión lineal.

El objetivo de los modelos de regresión lineal es tratar de explicar los cambios que se producen en una característica(variable) sobre la base de los cambios producidos en otra/s variable/s. La regresión múltiple permite analizar como afectan, de manera conjunta, el comportamiento de otra variable y estudiar de manera pormenorizada la influencia de cada una de las variables explicativas en la variable objeto de estudio.

A partir de una variable respuesta, la que se denomina *dependiente, explicada o criterio* (y_i), contando para su estudio con otras variables denominadas *independientes, explicativas, predictoras,* $x_{1i}, \ldots, x_{ni}$, se desea construir un modelo de la forma:

$$y_i = f(x_{1i}, , \ldots, x_{ni}) + e_i$$

conocido como modelo de regresión. Si sólo se tiene una variable independiente se está hablando de un modelo de regresión simple, mientras que si existen más de dos variables independientes se habla de un modelo de regresión múltiple.

En el modelo que estudiaremos a continuación la variable dependiente es cuantitativa, las variables independientes pueden ser cuantitativas y en algunos casos se pueden incluir variables cualitativas. Para poder utilizar la información aportada por variables cualitativas, en el modelo de regresión se debe dicotomizar su información, tal y como se verá más adelante.

9.2. Modelo de regresión lineal simple

Los modelos de regresión simple permiten expresar a la variable dependiente y_i como

$$y_i = f(x_i) + e_i$$

donde $f(x_i)$ es el componente determinístico y e_i el componente estocástico.

Un diagrama de dispersión sobre la muestra (x_i, y_i) nos da una primera idea del grado y tipo de relación que existe entre las variables x e y, aun cuando la relación no es exacta ya que la representación gráfica de los datos no coincida con la gráfica de ninguna función matemática.

Con el análisis de regresión se trata de aproximar el componente determinístico a una forma funcional que permita explicar los cambios de la variable y_i a partir de los cambios en la variable x_i.

Dado que se desconoce el tipo de función $f(x)$ que relaciona a ambas variables, el primer paso consiste en establecer el tipo de función, esto es, ver si la relación es lineal, curvilínea, o de cualquier otra forma que pudiera ser imaginada; posteriormente se pasará a estimar los parámetros de dicha función.

En investigación se asume habitualmente la linealidad de las relaciones entre variables, por diferentes razones. En primer lugar, porque empíricamente se ha comprobado la linealidad y, en segundo lugar porque la mayor parte de las veces, no se dispone de teoría o de conocimientos que permitan garantizar que la relación no es lineal. Además, no debemos olvidar que la especificaión lineal es más sencilla y parsimoniosa.

Si se supone la linealidad de la relación , la ecuación $y_i = f(x_i) + e_i$ puede ser escrita como: $y_i = a + bx_i + e_i$ la cual representa la ecuación que pretendemos ajustar a los datos.

Una vez decidido el modelo, en este caso la ecuación de una recta, se deben estimar los parámetros, de manera tal que la ecuación sea la mejor que se ajuste a nuestros datos. Pero ¿qué significa la mejor que se ajuste a los datos?. Para dar una respuesta a esta pregunta se pueden utilizar diferentes criterios y entre los muchos existentes el más utilizado es el "*Método de los mínimos cuadrados ordinarios*". Siguiendo este criterio los valores de a y b que definen la ecuación de regresión lineal simple, son aquellos que minimizan

la suma de los errores al cuadrado cometido al realizar el ajuste de los datos al modelo. Es decir, la recta que mejor se ajusta a los datos es aquella para la cual la suma de las distancias entre los puntos y la recta(distancia vertical) son mínimos.

Partiendo de la definición del modelo de regresión lineal simple, los errores se expresan como:

$$e_i = y_i - a - bx_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

Así pues, los valores de a y b que se derivan del método de mínimos cuadrados ordinarios, son aquellos para los cuales se minimiza:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \tag{9.1}$$

Al derivar la ecuación (9.1) respecto a los parámetros se tiene:

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) &= 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)x_i &= 0 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i - na - b\sum_{i=1}^{n} x_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i x_i &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \overline{y}_i - a - b\overline{x}_i &= 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\overline{x}_i - \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_i &= 0 \end{aligned} \tag{9.2}$$

Las ecuaciones 9.2 se conocen como **las ecuaciones normales del modelo de regresión lineal simple**.

Una vez estudiados los parámetros del modelo de regresión lineal simple, mediante las ecuaciones de normalidad, se debe completar el proceso interpretando de manera adecuada los resultados obtenidos. La interpretación de los resultados se orienta fundamentalmente en dos direcciones:

- Conocer el significado de los valores a y b obtenidos
- Analizar la bondad de ajuste

9.2.1. Interpretación de los parámetros

El valor a intercepto, representa el valor que se le asigna a la variable dependiente, en el caso en que la variable independiente se anula; geométricamente a representa el punto de corte de la recta de regresión con el eje y.

El valor b representa el incremento de la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta en una unidad; desde el punto de vista geométrico, b representa la pendiente de la recta de regresión lineal simple.

A veces el intercepto carece de interpretación, pues en algunos casos no tiene sentido plantearse que la variable independiente tome el valor cero.

A partir de la ecuación estimada se puede hacer predicciones de la variable dependiente para cualquier nivel de la variable independiente, sustituyendo el valor de la variable independiente deseado, en la ecuación estimada.

Coeficiente beta

En ocasiones, sobre todo cuando las variables que intervienen en el modelo están medidas en escalas muy diferentes, puede resultar interesante, trabajar con variables estandarizadas en vez de hacerlo con las variables iniciales. De esta manera podemos comparar los resultados obtenidos con variables medidas en diferentes escalas. Los coeficientes obtenidos para las variables estandarizadas, son conocidos como *los coeficientes beta*, su cálculo es muy simple:

$$\beta = b * \frac{S_x}{S_y}$$

donde S_x, S_y son la desviación típica de x e y respectivamente.

La interretación de estos coeficientes es la siguiente: *beta representa el número de desviaciones típicas en que se incrementa el valor de la variable dependiente cuando la variable independiente se incrementa en una desviación típica.* En el modelo de regresión lineal simple, el valor del coeficiente beta coincide con el del coeficiente de correlación; cuando se estudia un modelo de regresión lineal múltiple los coeficientes beta permiten analizar la importancia relativa de cada una de las variables explicativas o predictoras.

9.2.2. Calidad del ajuste

Para calibrar la calidad del ajuste obtenido, es preciso recordar que uno de los objetivos del modelo de regesión es explicar los cambios en la variable dependiente. Existe un porcentaje de estos cambios que puede ser explicado por los cambios que se dan en la variable independiente y otros no. Cuanto mayor sea el porcentaje de cambios que sea capaz de explicar el modelo de regresión, mejor será el ajuste obtenido. ¿Cómo se mide la calidad del ajuste? ¿Cómo se mide el porcentaje explicado?. El porcentaje explicado se expresa mediante el coeficiente de determinación R^2 que mide el porcentaje de los cambios en la variable dependiente que son explicados por la/s variable/s independiente/s.

Otra forma equivalente de calibrar la calidad del ajuste obtenido mediante el modelo, es analizar las distancias, diferencias entre los valores de la variable dependiente y las estimaciones obtenidas mediante el modelo de regresión lineal. Las mayores o menores diferencias que se dan en estos valores, es decir, los residuales, permiten calibrar la calidad del ajuste. La magnitud de los residuos está relacionada con el coeficiente de determinación R^2. A mayor R^2 (mayor relación entre las variables) menor error cometido.

9.2.3. Análisis de la varianza

En la definición de mínimos cuadrados ordinarios, se señaló que éstos poseen propiedades estadísticas deseables, en la práctica, para un buen estimador. Una de esas propiedades es la siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 &= \sum_{i=1}^{n} (\widehat{y}_i - \overline{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y})^2 \\ SCT &= SCR + SCE \end{aligned}$$

Esta relación permite descomponer la variación total de la variable dependiente (SCT) en dos términos, uno, el explicado por el modelo de regresión lineal (SCR) y el otro el residual o no explicado por el modelo (SCE).

La suma de los cuadrados residuales (SCE) está compuesta por las distancias entre los valores de la variable dependiente y las predicciones de ella realizadas mediante el modelo de regresión $\widehat{y}_i$.

La suma de los cuadrados de la regresión SCR está compuesta por las distancias entre los valores estimados y la media total, mide la porción de la variación en la variable dependiente que es explicada por la variable independiente.

Todas las sumas de los cuadrados llevan asociado un número de grados de libertad; este número indica la cantidad de sumandos independientes que se disponen a la hora de calcular la suma. Una vez conocidos los grados de libertad se puede construir una tabla de análisis de la varianza, que permite analizar la significanción conjunta de las variables incluidas como variables explicativas en el modelo de regresión y por ello la significación del modelo en si. En nuestro caso la tabla del análisis de la varianza se resume como:

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	G.L.	Media cuadrática	test
Regresión	$\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i - \overline{y})^2$	1	$MCR = \frac{SCR}{K}$	
Residual	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{y}_i)^2$	$n-2$	$MCE = \frac{SCE}{n-K-1}$	$F = \frac{MCR}{MCE}$
Total	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_i)^2$	$n-1$		

Tabla 9.1: Tabla de análisis de la varianza

donde n el número de observaciones.

Si el p-valor asociado al estadístico F es menor que α, luego, al nivel de significación del $\alpha\,\%$ se rechaza la hipótesis nula de que la pendiente de la recta de regresión es igual a cero, o equivalentemente, la hipótesis nula de que las dos variables que conforman el modelo están incorrelacionadas.

9.2.4. Coeficiente de determinación

A partir de la información contenida en la tabla del análisis de la varianza, se puede calcular el coeficiente de determinación como el cociente de la suma de cuadrados de la regressión y la suma de cuadrados total, es decir:

$$R^2 = \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{SCE}{SCT}$$
$$0 \leq R^2 \leq 1$$

En el caso de que exista una relación exacta entre las dos variables(todos los puntos están sobre la recta) el ajuste es perfecto pues toda la variación de la variable dependiente es explicada por la variable independiente y no se comete error en la estimación. La suma de residual nula y la suma de cuadrados total coincide con la de regresión, por lo tanto el cociente entre ambas es la unidad ($R^2 = 1$). En el caso contrario, que no exista alguna relación entre las variables, la suma de cuadrados total coincide con la residual(la regresión no explica nada) y por lo tanto la suma de cuadrados de la regresión es nula, en consecuencia $R^2 = 0$.

En conclución, en el modelo de regresión lineal, la variable independiente explica el $R^2 * 100\,\%$ de la variación total de la variable dependiente.

En este momento surge inmediatamente la pregunta de si este porcentaje es mucho o poco, si la relación es grande o pequeña. La pregunta en si misma carece de sentido. Sólo se puede dar una respuesta a la misma en términos comparativos, bien con otra investigación o con nuestras expectativas, o con el riesgo que supone la toma de una decisión en un sentido u otro. Se debe ser capaz de valorar el resultado, más allá de la significación de la relación.

Los estadísticos R^2 y F se relacionan mediante la expresión

$$F = \frac{\frac{R}{K}}{\frac{1-R^2}{n-K-1}}$$

Coeficiente de determinación corregido

El coeficiente de determiación está afectado por el número de variables independientes que se introducen en modelo de regresión lineal, de tal manera que a medida que se incluyan más variables explicativas el valor de R^2 siempre aumenta, aunque las variables introducidas no tengan ninguna influencia en el comportamiento de la variable dependiente. El coeficiente de determinación corregido introduce un factor de corrección para tener en cuenta este hecho, y se define mediante la expresión:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\frac{SCE}{n-k-1}}{\frac{SCT}{n-1}} = 1 - \frac{n-1}{n-K-1}(1-R^2)$$

Este coeficiente aumenta si la variable incluida es importante para explicar el comportamiento de la variable dependiente, pero se reduce en el caso contrario. A efectos de comparación de modelos este es el coeficiente que ha de ser utilizado.

9.2.5. Coeficiente R de Pearson

El coeficiente R de Pearson o coeficiente Correlación lineal entre la variable dependiente y la/s variable/s independientes, es un estadístico de prueba para analizar la relación del tipo causal entre dos variables.

El coeficiente de correlación lineal se define mediante la expresión:

$$R = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x S_y}}$$

El valor de coeficiente R de Pearson puede variar entre -1 y 1 el signo indica la direccción de la correlación y el valor la magnitud de la correlación.

Valores de R próximos a 1 indicarán fuerte asociación lineal positiva (a medida que aumentan los valores de una de las dos variables, aumentan los valores de la otra); valores de R próximos a cero indicarón que no existe asociación lineal(lo que no significa que no pueda haber otro tipo de asociación); valores de R próximos a -1 indicarán fuerte asociación lineal negativa(a medida que aumentan los valores de una de las dos variables, disminuyen los valores de la otra).

El coeficiente de correlación es una medida del grado de asociación lineal que depende del tamaño de la muestra: un mismo valor del coeficiente de correlación muestral calculado a partir de muestras de diferentes tamaños, no corresponde al mismo grado de asociación lineal. Para determinar si la asociación es estadísticamente significativa se debe formular la hipótesis nula:

$$H_0 : \rho = 0$$

Donde ρ es el coeficiente de correlación poblacional. Si el p-valor asociado al estadístico de Pearson es menor que α entonces se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación del $\alpha\,\%$.

9.2.6. Error típico de estimación

El error típico de estimación constituye una valoración de los errores que se han cometido o de la parte que se dejo sin explicar. Se define como:

$$S = \sqrt{\frac{SCE}{n-K-1}}$$

Este valor, va a ser el indicador que se utilizará para calibrar el error cometido al efectuar predicciones pues vamos a suponer que lo que se ha confundido hasta ahora, será lo que por término medio se confundirá más adelante.

9.2.7. Sobre muestras y poblaciones

Al efectuar el análisis de datos se debe tener en cuenta si los mismos representan a todos los sujetos de una población o si corresponden a una muestra representativa de una población a la que se pretende extrapolar los resultados.

En el primer caso la persección que se obtenga es la mejor que se ajusta al conjunto de datos de toda la población y con el estudio de la ecuación finaliza el proceso de análisis de regresión. En el caso en que los datos correspondan a una muestra representativa de la población, la recta que mejor se ajusta

los datos será a su vez un estimador de la ecuación que mejor se ajuste a los datos de nuestra población objeto de estudio. Es decir, la ecuación de regresión obtenida en base a la muestra, será un estimador de la "verdadera" ecuación de regresión poblacional, la cual se escribe como:

$$y_i = \beta X_i + \xi_i \tag{9.3}$$

donde

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \qquad X_i = \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix}$$

En este contexto los coeficientes a y b serán estimadores de β. Este hecho, implica que si se trabajará con otra muestra se obtendrían coeficientes diferentes para la ecuación de regresión. Es decir, los valores de a y b que se obtienen a partir de una muestra no van a ser los mismos, si cambiamos de muestra, los estimadores pueden variar de una muestra a otra. Esto implica que para calibrar adecuadamente los resultados se debe determinar indicadores que permitan conocer cuánto puede variar los valores de a y b de una muestra a otra y todos los coeficientes obtenidos a partir de ellos. Estos indicadores permiten construir intervalos de confianza para los parámetros poblacionales β y analizar si los parámetros poblacionales son significativamente diferentes de cero. Para ello se deben cumplir algunos supuestos o condiciones de aplicabilidad.

9.2.8. Supuestos teóricos del modelo de regresión

Todo modelo se basa en un conjunto de supuestos teóricos particulares. Sabemos que para construir el modelo de regresión lineal las variables deben ser cuantitativas, sin embargo, se tienen que cumplir otras condiciones para poder efectuar inferencia sobre los parámetros poblacionales:

1. Modelo bien especificado
   - La relación es lineal
   - No han quedado fuera del modelo variables independientes importantes
   - No se han incluido en el modelo variables irrelevante
2. Los errores aleatorios deben cumplir
   - Los residuales ξ_i se distribuyen normalmente.

- $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$
- $\mathbb{E}(\xi_i^2) = \sigma^2 \qquad \forall i$
- $\mathbb{E}(\xi_i x_i) = 0 \qquad \forall i$
- $\mathbb{E}(\xi_i \xi_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$

En definitiva $\xi_i \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2)$ y partiendo de la ecuación $y_i = \beta X_i + \xi_i$, se deduce que

$$y_i \sim \mathbb{N}(\mu_i, \sigma^2)$$

donde $\mu_i = \beta X_i$. Bajo estas condiciones podemos calcular el indicador de variabilidad de los estimadores si cambiamos de muestras: sus varianzas. Las expresiones correspondientes a la varianza de cada uno de los parámetros muestrales es:

$$\begin{aligned} Var(b) &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2} \\ Var(a) &= \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2} \right] \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores dependen de la varianza de los errores que se comenten en la población σ^2, la cual es desconocida y será estimada mediante el error típico de la estimación S^2. Con ello lo que se calcula son estimadores de la varianza de los parámetros estimados, definidas mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} S_b^2 &= \frac{S^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2} \\ S_a^2 &= S^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2} \right] \end{aligned}$$

La raíz cuadrada de las expresiones anteriores se conoce como *errores típicos*; mientras más imprecisa es la estimación, menos confianza podemos depositar en los valores estimados para los parámetros del modelo de regresión establecido para la población.

9.2.9. Inferencia sobre los parámetros poblacionales

Teniendo en cuenta que la distribución de los residuos en la población es normal con media cero y varianza σ^2, se concluye que los estimadores a y b siguen también una distribución normal con media β_0 y β_1, varianzas $var(a)$ y $var(b)$ respectivamente, los cuales serán a su vez estimados mediante S_a y S_b.

En efecto, para verificar la afirmación anterior es necesario mostrar que a y b son combinación lineal de las observaciones. De las ecuaciones de normalidad del modelo de regresión lineal simple, sabemos que:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum_i (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sum_i (x_i - \overline{X})^2} \\ a &= \overline{Y} - b\overline{X} \end{aligned}$$

Como $\sum_i (x_i - \overline{X}) = 0$, entonces

$$\sum_i (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y}) = \sum_i (x_i \overline{X}) y_i - \overline{Y} \sum_i (x_i \overline{X}) = \sum_i (x_i - \overline{X}) y_i$$

entonces

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum_i (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sum_i (x_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum_i (x_i - \overline{X}) y_i}{\sum_i (x_i - \overline{X})^2} = \sum_i \frac{(x_i - \overline{X})}{\sum_i (x_i - \overline{X})^2} y_i \\ &= \sum_i C_i y_i \end{aligned}$$

donde

$$C_i = \frac{(x_i - \overline{X})}{\sum_i (x_i - \overline{X})^2}$$

es decir a y b son combinación lineal de las observaciones.

Por definición de las C_i tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} C_i &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i x_i &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X}) x_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})(x_i - \overline{X})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2} = 1 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(b) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbb{E}\left(y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbb{E}\left(\beta_0 + \beta_1 x_i\right) \\ &= \beta_0 \sum_{i=1}^{n} C_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} C_i x_i = \beta_1\end{aligned}$$

Por otra parte, como las observaciones son incorrelacionadas, entonces

$$\begin{aligned}Var(b) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 Var\left(y_i\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1} \left(\frac{(x_i - \overline{X})}{\sum_i (x_i - \overline{X})^2}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_i (x_i - \overline{X})^2}\end{aligned}$$

análogamente, para a tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(a) &= \mathbb{E}\left(\overline{Y} - b\overline{X}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_i y_i}{n} - \overline{X}b\right) \\ &= \beta_0 + \beta_1 \overline{X} - \beta_1 \overline{X} = \beta_0\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}Var(a) &= Var\left(\overline{Y} - b\overline{X}\right) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - \overline{X} \sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right) \\ &= Var \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \overline{X} C_i\right) y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \overline{X} C_i\right)^2 Var(y_i) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \overline{X} C_i\right)^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{\overline{X}}{\sum_i (x_i - \overline{X})^2}\right)\end{aligned}$$

A partir de estas distribuciones se puede construir intervalos de confianza (IC) para los parámetros β_0 y β_1, y realizar contrastes de hipótesis sobre los mismos.

Intervalos de confianza para los parámetros

Fijado un nivel de confianza α y sabiendo que los estadísticos:

$$\begin{aligned}T &= \frac{a - \beta_0}{S_a} \\ T &= \frac{b - \beta_1}{S_b}\end{aligned}$$

se distribuyen como una $t-$student con $n-2$ grados de libertad, entonces, podemos construir intervalos de confianza para β_0 y β_1 al $(1-\alpha)*100\,\%$, mediante las relaciones:

$$\begin{aligned} IC_{\beta_0} &= \left(a \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-2} S_a\right) \\ IC_{\beta_1} &= \left(b \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-2} S_b\right) \end{aligned}$$

IC_{β_0} permite responder a la pregunta ¿cuál es el valor promedio de la variable dependiente cuando la variable independiente se anula? La respuesta es cualquier valor perteneciente a IC_{β_0}.

IC_{β_1} permite responder a la pregunta ¿cuánto crece la variable dependiente por cada incremento unitario en la variable independiente? La respuesta es cualquier valor perteneciente a IC_{β_1}. Si los intervalos son amplios la estimación es imprecisa.

Contraste de significancia individual de cada parámetro

Mediante este tipo de contraste se estudia la hipótesis nula que garantiza la nulidad de los parámetros asociados a cada una de las variables independientes en el modelo poblacional. Si el parámetro es distinto de cero la variable asociada a él es relevante para explicar el comportamiento de la variable dependiente. Por el contrario si el parámetro es nulo la variable asociada a él deberá salir del modelo planteado para la población pues resulta irrelevante.

Para realizar el contraste se utilizarán los estimadores de los parámetros obtenidos a partir de la muestra con que se trabaja.

- Contraste de hiótesis para β_0

  Hipótesis:

  $$H_0 : \beta_0 = 0$$
  $$H_1 : \beta_0 \neq 0$$

  Estadístico de prueba

  $$T = \frac{a}{S_a} \sim t_{n-2}$$

  Decisión sobre el contraste: Si el p-valor, la probabilidad de equivocarse al rechazar H_0, es mayor que α, se rechaza H_0, en caso contrario no se rechaza.

- Contraste de hiótesis para β_1

Hipótesis:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Estadístico de prueba

$$T = \frac{b}{S_b} \sim t_{n-2}$$

Decisión sobre el contraste: Si el p-valor, la probabilidad de equivocarse al rechazar H_0, es mayor que α, se rechaza H_0, en caso contrario no se rechaza.

Contraste de significancia conjunta o Contraste de significancia de la regresión

Para determinar si es significativa la parte de la variabilidad total que viene explicada por el modelo de regresión se utilizan las pruebas de contraste de significación conjunta.

En otras palabras, estas pruebas permiten contestar la pregunta ¿Es importante la parte de la variabilidad de la variable dependiente que es explicada mediante la ecuación de regresión?. En el caso del modelo de regresión lineal simple este contraste es equivalente al contraste de significación de β_1:

Hipótesis:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Estadístico de prueba

$$f = \frac{MCR}{MCE} \sim F_{k,n-k-1}$$

Decisión sobre el contraste: Si el p-valor, la probabilidad de equivocarse al rechazar H_0, es mayor que α, se rechaza H_0, en caso contrario no se rechaza.

Si se rechaza H_0, se está diciendo que las variables explicativas incluidas en el modelo poseen parámetros distintos de cero o lo que es equivalente a que la parte de la variabilidad que es explicada por la regresión es significativa.

Recuérdese que existe una realción entre los estadísticos F y R^2 por lo que mediante este contraste se está analizando si el R^2 es suficientemente elevado como para considerar las variables explicativas conjuntamente significativas para explicar los cambios en la variable dependiente.

Inferencia sobre las predicciones

A partir de los estimadores de los parámetros se generan valores estimados de la variable dependiente. Si se cambia de muestra obtendríamos otros estimadores y otros valores estimados para la variable dependiente. La variabilidad del valor estimado para cada individuo viene dada en términos de la varianza $Var(\widehat{y}_i)$, la cual se expresa como:

$$Var(\widehat{y}_i) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2} \right]$$

si el valor que se predice es la media de la variable dependiente para cada individuo, es decir , $\mu_i = \beta X_i$

$$Var(\widehat{y}_i) = \sigma^2 \left[1\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2} \right]$$

si lo que se predice es el valor de la variable dependiente para cada individuo, es decir,$\widehat{y}_i = \beta X_i + \xi_i$

Al igual que en el caso de los estimadores de los parámetros del modelo, la varianza depende de σ^2 y por ello, cuando sustituimos este valor por el estimador obtenido a partir de la muestra, se obtienen estimadores de la varianza definidos por:

$$S^2_{\widehat{y}_i} = S^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2} \right]$$

$$S^2_{\widehat{y}_i} = S^2 \left[1\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2} \right]$$

A partir de estos resultados se puede construir un intervalo de confianza (IC) para el valor medio y para el valor estimado de la variable dependiente, definido por

$$IC_{\widehat{y}_i} = \left(\widehat{y}_i \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} S_{\widehat{y}_i} \right)$$

El IC para el valor de la variable dependiente estimada, será más amplio que para el valor esperado de ella. Eso es debido a que es más difícil conocer un comportamiento individual que un comportamiento promedio.

9.2.10. Análisis de los residuos

Un investigador puede confiar en los resultados que obtiene a partir de un modelo de regresión lineal simple, sólo cuando ha verificado que sus datos satisfacen los supuestos que se refieren a los términos aleatorios o residuos del modelo. Existen suficientes evidencias proporcionadas por los investigadores en modelos estadísticos multivariados, las cuales señalan que cuando la bondad de ajuste del modelo se evalúa empleando exclusivamente el diagrama de dispersión y R^2 se puede concluir erróneamente.

Los residuos se definen como:

$$\xi_i = y_i - \widehat{y}_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

donde y_i es una observación, $\widehat{y}_i$ es su correspondiente valor estimado mediante la ecuación de regresión lineal simple. Un residuo puede ser visto como la desviación entre el dato y su estimación, él es una medida de la variabilidad no explicada por el modelo de regresión, así, es conveniente ver los residuos como los valores observados de los errores, razón por la cual el análisis de los residuos es un método efectivo para detectar diferentes tipos de defectos en el modelo.

Los residuos poseen varias propiedades importantes: su media es nula, la varianza se aproxima mediante la relación:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}{n-2} = \frac{SCE}{n-2} = MCE$$

Con frecuencia se trabaja con los residuos estandarizados:

$$d_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{MCE}} \qquad 1 \leq i \leq n$$

de manera que los residuos estandarizados poseen media cero y varianza aproximadamente uno.

Una forma de verificar los supuestos consiste en emplear un método gráfico, mediante el cual se examina el patrón que siguen los residuos, para tal fin se utilizan residuos estandarizados. La distribución de los residuales estandarizados posee media mula y desviación típica uno. Los supuestos establecen que los residuos se distribuyen normal estándar y además independientemente. Cuando se utilizan muestras grandes, los residuos se distribuyen normalmente y además la perdida de independencia no afecta gravemente los resultados. No obstante, en cualquier caso se debe analizar el patrón de los residuos.

Un gráfico apropiado de los residuos dará información sobre la violación de los supuestos teóricos del modelo. Algunos de los usados más frecuentes,

son aquellos en los cuales los residuos estandarizados son graficados contra los valores estimados de la variable dependiente, o contra los valores de la variable independiente sobre el eje x. En general, cuando el modelo es adecuado los residuos estandarizados toman valores entre -2 y 2 y se distribuyen aleatoriamente alrededor de la recta $e = 0$.

A continuación se presentarán varios tipos de gráficos de residuos, los cuales son utilizados para detectar problemas en los modelos de regresión; tales métodos son simples y efectivos, y en consecuencia, se recomienda su uso en cualquier problema asociado al análisis de regresión.

Gráficos P-P normales

Un método simple de verificar el supuesto de normalidad de los residuos, es usar gráfico P-P normales, para ello se utilizan gráficos de los residuos ordenados creciente. $\xi_{[1]} \leq \xi_{[2]} \leq \ldots \leq \xi_{[n]}$ contra " el valor esperado normal" $\Phi^{-1}\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{n}\right)$, donde Φ es la distribución normal estándar.

Un gráfico P-P normal refleja ajuste perfecto de normalidad cuando los puntos se alinean aproximadamente todos, sobre la recta $y = x$, como lo ilustra la figura 9.1, construida usando paquetes estadísticos.

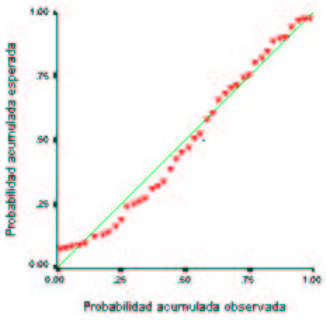

Figura 9.1: Gáfico PP

Cuando el gráfico muestra un desvío superior e inferior de la nube de puntos en los extremos de la recta $y = x$; indicando que las colas de la distribución de los residuos son más pesadas que las de la distribución normal. Caso contrario si el gráfico muestra alisamiento en los extremos, patrón típico de muestras provenientes de una distribución con colas más ligeras que la normal. Cuando la nube de puntos se agrupa por debajo de la recta $y = x$ la distribución de los residuos presenta asimetría negativa, mientras que en caso

contrario la asimetría es positiva. En tales casos el supuesto $\xi_i \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2)$, no se cumple.

La hipótesis de normalidad puede ser estudiada considerando el histograma de los residuos. Los residuos estandarizados son de gran utilidad para verificar la condición de normalidad. Si los errores están distribuidos normalmente, entonces el 68 % de los residuos estandarizados deben caer entre -1 y 1, y aproximadamente el 95 % de los errores se ubican entre -2 y 2. Desviaciones sustanciales de estos límites indican violación potencial del supuesto de normalidad

9.2.11. Gráficos de residuos contra valores $\widehat{y}_i$

Un gráfico de los residuos ξ_i versus los correspondientes valores estimados $\widehat{y}_i$ son utilizados para detectar anomalías en el modelo de regresión lineal

Si el gráfico muestra una nube uniforme de puntos en una franja horizontal se puede inferir que el modelo de regresión lineal es adecuado para describir la asociación entre las variables en estudio, en caso contrario patrones diferentes son indicios de modelos deficientes.

Cuando la nube de puntos no es uniforme en la banda horizontal indica que la varianza de los errores no es constante, es decir, estamos en presencia de un modelo con errores heteroscedásticos.

Gráficos con patrones no aleatorios de la nube de puntos son indicadores de relaciones no lineales entre las variables, tal caso se ilustra en la figura 9.2

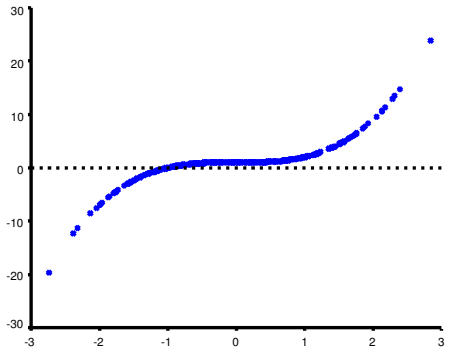

Figura 9.2: Modelo no lineal

El gráfico de los residuos contra $\widehat{y}_i$ puede presentar uno o más residuos grandes inusuales. Estos puntos, son en efecto, potenciales outlier. Grandes residuos que se presentan en valores extremos de $\widehat{y}_i$ pueden indicar también

o que la varianza no es constante o que la verdadera relación entre las variables que conforman el modelo no es lineal. Tales posibilidades deben ser consideradas antes de clasificar los puntos extremos como outliers. Gráficas de los residuos contra los valores de la variable explicativa son de ayuda también.

9.3. Modelo de regresión lineal múltiple

El modelo de regresión lineal múltiple es una extensión del modelo simple, que surgió ante la necesidad de explicar los fenómenos tal como se presentan en la realidad; es decir,, como fenómenos multideterminados. En consecuencia el modelo de regresión lineal múltiple es una técnica estadística que permite análisis de situaciones de interés desde la perspectiva de dos o más variables independientes.

En la investigación, en general, la regresión lineal múltiple constituye una técnica muy útil, ya que permite al investigador entender y explicar el comportamiento de una característica poblacional considerando los factores más importantes que determinan su comportamiento, sea individual o en el contexto al cual representa. Al mismo tiempo, permite cuantificar, con mayor precisión, el efecto de cada variable independiente sobre la variable dependiente, porque elimina cualquier distorción que pudiera ocasionar la presencia de otras variables independientes; esto otorga al investigador mayor confianza en la interprretación de los resultados obtenidos.

9.3.1. Descripción de los datos

Los datos consisten de n observaciones sobre una variable dependiente y k variables independientes, representados en el siguiente esquema:

	variables				
Observaciones	y	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
1	y_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1k}
2	y_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2k}
$\vdots$				$\cdots$	$\vdots$
n	y_n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{nk}

La relación entre la variable y y las variables $x_1, \ldots, x_k$ se plantea utilizando el "*Modelo lineal general de regresión*", mediante la ecuación:

$$Y = X\beta + \xi \tag{9.4}$$

donde:

$$\begin{aligned} Y &= \text{vector } (n \times 1) \text{ de respuestas} \\ X &= \text{matriz } (n \times k+1) \text{ de variables independiente} \\ \beta &= \text{vector } (k+1 \times 1) \text{ de parámetros desconocidos} \\ \xi &= \text{vector } (n \times 1) \text{ de errores aleatorios} \end{aligned}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \qquad \xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}$$

con:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= 0 \\ \mathbb{E}(\xi^t \xi) &= \sigma^2 I_n \\ Var(\xi) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

A partir de la ecución (1.4) se tiene:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \xi_i \qquad 1 \leq i \leq\leq n$$

Los coeficientes β_i son los parámetros del modelo de regresión lineal general, se interpretan como el incremento de la variable dependiente y generado por el incremento unitario de la variable independiente X_i cuando las demás variables se mantienen constantes.

9.3.2. Supuestos del modelo poblacional

El modelo lineal general descrito mediante la ecuación:

$$y_i = X_i^t \beta + \xi_i \qquad 1 \leq i \leq k$$

con $X_i^t = (1, X_{1i}, \cdots, X_{ki})$, se establece bajo los supuestos teóricos siguientes:

1. Homocedasticidad de los errores

$$\xi_i \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2 I_n)$$

2. Independencia de los errores

$$Cov(\xi_i \xi_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$$

3. Homocedasticidad de las observaciones

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(y_i) &= X_i^t\beta \\ Var(y_i) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

4. Independencia de las observaciones

$$Cov(y_i y_j) = 0 \qquad \forall i \neq j$$

5. Aditividad de los efectos

$$y_i = x_i^t\beta + \xi_i \qquad 1 \leq i \leq k$$

Los supuestos sobre las observaciones son consecuencia de los supuestos teóricos sobre los errores, ya que los errores son el componente aleatorio del modelo lineal general, y como tal definen a las y_i como variables aleatorias.

9.3.3. Estimación del modelo

La estimación del modelo de regresión lineal general se basa en el método de mínimos cuadrados ordinarios, es decir, los estimadores del vector β son los valores que minimizan al funcional

$$L = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \xi^t\xi$$

Partiendo de la ecuación

$$Y = X\beta + \xi$$

se tiene:

$$\xi = Y - x\beta$$

de donde

$$L = Y^tY - 2X^tY\beta + \beta^tX^tX\beta$$

al derivar respecto de los parámetros se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -2X^tY + 2X^tX\beta = 0 \tag{9.5}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^t} = 2X^tX \tag{9.6}$$

Si la matriz definida por (9.6) es inversible, entonces el sistema definido por (9.5) posee solución única: el valor que minimiza al operador L, eatá definido como:

$$\widehat{\beta} = \left(X^t X\right)^{-1} X^t Y$$

El sistema (9.5) constituye las ecuaciones normales de la estimación del vector β.

Como:

$$X^t X = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} & \cdots & \sum X_{ik} \\ & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} & \cdots & \sum X_{i1}X_{ik} \\ & & \sum X_{i2}^2 & \cdots & \sum X_{i2}X_{ik} \\ & & & \cdots & \vdots \\ & & & & \sum X_{ik}^2 \end{bmatrix}$$

$$X^t Y = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{i1}Y_i \\ \\ \vdots \\ \sum X_{ik}Y_i \end{bmatrix}$$

entonces, las ecuaciones normales para la estimación del modelo de regresión lineal general son:

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} & \cdots & \sum X_{ik} \\ & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} & \cdots & \sum X_{i1}X_{ik} \\ & & \sum X_{i2}^2 & \cdots & \sum X_{i2}X_{ik} \\ & & & \cdots & \vdots \\ & & & & \sum X_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{i1}Y_i \\ \\ \vdots \\ \sum X_{ik}Y_i \end{bmatrix}$$

9.3.4. Sesgo y varianza de los estimadores

Considere el modelo de regresión:

$$Y = X\beta + \xi$$

con estimadores definidos por

$$\widehat{\beta} = \Big(X^t X\big)^{-1} X^t Y$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{\beta}) &= \mathbb{E}\Big((X^t X)^{-1} X^t (X\beta + \xi)\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(\beta + (X^t X)^{-1} X^t \xi\Big) = \beta \end{aligned}$$

ya que $(X^t X)^{-1} X^t$ es constante y $\mathrm{E}(\xi) = 0$, es decir, $\widehat{\beta}$ es un estimador insesgado para los parámetros del modelo de regresión lineal generalizado.

La matriz de covariancia del vector de estimadores $\widehat{\beta}$, está definida por:

$$\begin{aligned} Cov(\widehat{\beta}) &= \mathbb{E}\Big((\widehat{\beta} - \beta)(\widehat{\beta} - \beta)^t\Big) = Cov\Big((X^t X)^{-1} X^t Y\Big) \\ &= (X^t X)^{-1} X^t \sigma^2 \Big((X^t X)^{-1} X^t\Big)^t = \sigma^2 (X^t X)^{-1} \end{aligned}$$

De los resultados anteriores se tiene:

$$\widehat{\beta} \sim \mathbb{N}\Big(\beta, \sigma^2 (X^t X)^{-1}\Big)$$

9.3.5. El coeficiente de correlación múltiple y el Análisis de la varianza

El coeficiente de correlación múltiple $\rho_{Y,1,\cdots,k}$ es una medida del grado de asociación lineal entre la variable dependiente Y y el conjunto de variables independientes $X_1, X_2, \cdots, X_k$. Es la máxima correlación entre Y y el hiperplano $Y' = \sum_{i=1}^{k} c_i X_i$. Su valor está comprendido entre 0 y 1. Si es próximo a 1, el ajuste del hiperplano de regresión será casi perfecto, si es próximo a cero, el hiperplano de regresión no mejorará la predicción de Y sobre la predicción obtenida con la media muestral de Y.

El estimador muestral de $\rho_{Y,1,\cdots,k}$ es el coeficiente de correlacón múltiple muestral R. En el caso particular de una sóla variable independiente, el coeficiente de correlación múltiple coincide con el valor absoluto del coeficiente de correlación simple

Como en el modelo de regresión lineal simple, también, en el modelo de regresión lineal múltiple la variabilidad total se puede descomponer en la variabilidad explicada por la regresión y la variabilidad residual

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 &= \sum_{i=1}^{n} (\widehat{y}_i - \overline{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y})^2 \\ SCT &= SCR + SCE \end{aligned}$$

Esta relación permite descomponer la variación total de la variable dependiente (SCT) en dos términos, uno, el explicado por el modelo de regresión lineal (SCR) y el otro el residual o no explicado por el modelo(SCE).

La suma de los cuadrados residuales(SCE) está compuesta por las distancias entre los valores de la variable dependiente y las predicciones de ella realizadas mediante el modelo de regresión $\widehat{y}_i$.

La suma de los cuadrados de la regresión SCR está definida por las distancias entre los valores estimados y la media total, mide la porción de la variación en la variable dependiente que es explicada por las variables independientes.

Todas las sumas de los cuadrados llevan asociado un número de grados de libertad; este número indica la cantidad de sumandos independientes que se disponen a la hora de calcular la suma. Una vez conocidos los grados de libertad se puede construir una tabla de análisis de la varianza, que permite analizar la significanción conjunta de las variables incluidas como variables explicativas en el modelo de regresión y por ello la significación del modelo en si. En nuestro caso la tabla del análisis de la varianza se resume como:

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	G.L.	Media cuadrática	test
Regresión	$\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i - \overline{y})^2$	k	$MCR = \frac{SCR}{k}$	
Residual	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{y}_i)^2$	s	$MCE = \frac{SCE}{n-k-1}$	$F = \frac{MCR}{MCE}$
Total	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_i)^2$	t		

Tabla 9.2: Tabla de análisis de la varianza

Donde: $s = n - k - 1$, $t = n - k - 1$, k es el número de variables independientes, n el número de observaciones.

El estadístico F proporcionado por la tabla de análisis de la varianza permite contrastar la hipótesis nula que el vector normal al hiperplano de regresión es igual a cero, es decir:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta &= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} = 0 \\ H_1 : \beta &= 0 \end{aligned}$$

Si el p-valor asociado al estadístico F es menor que α, al nivel de significación del $\alpha\,\%$ se rechaza la hipótesis nula de que el vector normal al

hiperplano de regresión es igual a cero, o equivalentemente, la hipótesis nula de que las variables que conforman el modelo están incorrelacionadas.

Además, se verifica que:

$$R^2 = \frac{SCR}{SCT}$$

donde R^2 es el coeficiente de correlación múltiple muestral, la estimación del coeficiente de correlación poblacional $\rho_{Y,1,\cdots,k}$, al que se denomina *coeficiente de determinación*, es decir, el coeficiente de determinación se define a partir de la correlación múltiple y en el caso de una única variable independiente, coincidirá con el cuadrado del coeficiente de correlación simple. La generalización de la interpretación del coeficiente de determinación al caso múltiple es automática: proporciona la variabilidad total de la variable dependiente explicada mediante el hiperplano de regresión. la hipótesis nula anterior es equivalente a:

$$H_0 : \rho^2_{y,1,\cdots,k} = 0$$

o, lo que es lo mismo, a la hipótesis de que Y está incorrelacionada con cualquier combinación lineal del conjunto de variables $X_1, \cdots, X_k$.

El coeficiente de determinación presenta el inconveniente de que, a mayor número de variables en el modelo, mayor es su valor, por lo que, en general, se considera que R^2 tiende a sobreestimar el verdadero valor de $\rho^2_{Y,1,\cdots,k}$. El coeficiente de determinación ajustado por el número de observaciones y el número de variables independientes incluidas en la ecuación de regresión:

$$R^2_a = \frac{(n-1)R^2 - k}{n-1-k}$$

corrige la sobreestimación de R^2.

9.3.6. Estadísticos asociados a las variables independientes

Una alternativa para comparar la contribución de las distintas variables al modelo sería comparar los coeficientes de la ecuación de regresión: a mayor coeficiente, mayor influencia de los valores de la variable correspondiente en la estimación del valor de la variable dependiente. Sin embargo, los coeficientes de la ecuación de regresión presentan el inconveniente de que su magnitud es relativa. Teniendo en cuenta que el coeficiente asociado a una variable independiente es igual al incremento (positivo o negativo) que se produciría en la variable dependiente al variar en una unidad el valor de la independiente, un mismo coeficiente para dos variables en distintas unidades de medida podría indicar una importancia relativa muy distinta.

En el sentido anterior, para eliminar el efecto de las distintas unidades de medida de las variables independientes, sería más adecuado considerar los coeficientes de regresión tipificados o coeficientes beta; definidos por:

$$\beta = b_i \frac{S_{X_i}}{S_Y}$$

Los coeficientes beta son los coeficientes del hiperplano de regresión cuando éste se expresa como función de las variables tipificadas. Dado que al tipificar las variables se homogeneiza la unidad de medida, el coeficiente beta se puede interpretar como una medida de la contribución relativa de la variable correspondiente al modelo. El hiperplano de regresión construido a partir de la tipificación de las variables pasará por el origen y, por lo tanto, el coeficiente correspondiente al término independiente es igual a cero.

El hecho que una variable contribuya más que otra no significa necesariamente que su contribución sea grande. Podría suceder que la contribución de las dos fuera pequeña. Mediante el estadístico F asociado a la descomposición de la varianza contrastamos la hipótesis nula de que el vector normal al hiperplano de regresión es igual a cero:

$$H_0 : \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} = 0$$

El rechazar esta hipótesis no implica que, aunque el conjunto de las variables independientes mejore la estimación de los valores de la variable dependiente respecto a la media, todas ellas contribuyan a la mejora. Para comprobarlo contrastaremos la hipótesis nula anterior para cada parámetro en particular:

$$H_0 : \beta_i = 0 \qquad 1 \leq i \leq k$$

En este caso, la hipótesis nula significa que la variable X_i no mejora la predicción de Y sobre la obtenida con las $k-1$ variables restantes. El estadístico de contraste es igual a

$$T = \frac{B_j}{S_{B_j}}$$

es decir, el coeficiente estimado dividido por sue error de estimación. Si el p-valor asociado al estadístico de prueba es menor que α, se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación α.

La hipótesis nula anterior también podría plantearse para el término independiente del modelo:

$$H_0 : \beta_0 = 0$$

En este caso se interpreta como que el hiperplano de regresión pasa por el origen.

Intervalos de confianza para los parámetros

Para construir intervalos de confianza para los coeficientes de regresión β_j, se asume que los errores ξ_i se distribuyen $\mathbb{N}(0, \sigma^2)$; de manera tal que las observaciones y_j se distribuyen normales e independientes con media βX y varianza σ^2, como los estimadores mínimos cuadrados $\widehat{\beta}$ son combinación lineal de las observaciones, se tiene que $\widehat{\beta}$ se distribuyen $\mathbb{N}(\beta, \sigma^2(X^tX)^{-1})$. De esta manera la distribución marginal de cada uno de los coeficientes $\widehat{\beta}_j$ es $\mathbb{N}(\beta_j, C_{jj})$ donde C_{jj} es el j-ésimo elemento en la diagonal de $\sigma^2(X^tX)^{-1})$, en consecuencia, cada estadístico

$$T_j \quad = \quad \frac{b_j - \beta_j}{S_{b_j}} \qquad 1 \leq j \leq k$$

se distribuyen como una $t-$student con $n - k$ grados de libertad, entonces, podemos construir intervalos de confianza para cada β_j al $(1 - \alpha) * 100\,\%$, mediante las relaciones:

$$IC_{\beta_j} \quad = \quad \left(b_j \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-k} S_{b_j}\right)$$

IC_{β_0} permite responder a la pregunta ¿cuál es el valor promedio de la variable dependiente cuando la variable independiente se anula? La respuesta es cualquier valor perteneciente a IC_{β_0}.

IC_{β_j} permite responder a la pregunta ¿cuánto crece la variable dependiente por cada incremento unitario en la variable independiente X_j, cuando las demás variables independientes permanecen constantes? La respuesta es cualquier valor perteneciente a IC_{β_j}.

Si los intervalos son amplios la estimación es imprecisa. Para medir cual de dos variables que conforman el modelo, añade más información a la proporcionada por la otra, bastaría con calcular la correlación entre los residuos, denominado correlación parcial entre la variable dependiente y la variable independiente en ordenadas, después de eliminar el efecto de la otra variable independiente.

9.3.7. El coeficiente de correlación parcial

Dada una variable dependiente Y, y un conjunto de variables independientes $X_1, \cdots, X_k$ todas en escala de intervalo o de razón, el coeficiente de correlación parcial, $r_{YX_j.C}$, entre la variable dependiente y una de las variables independientes X_j, mide el grado de asociación lineal entre ellas dos, después de eliminar el efecto lineal del conjunto de las $k-1$ restantes variables independientes, al que denotaremos por C. Los valores del coeficiente de correlación parcial se interpretan igual que los del coeficiente de correlación simple. El estimador muestral para el coeficiente de correlación parcial poblacional $\rho_{YX_j.C}$ es el coeficiente de correlación muestral $r_{YX_j.C}$.

Para determinar si el grado de asociación lineal entre las variables Y y X_j después de eliminar el efecto de las restantes variables independientes, es estadísticamente significativo, se puede plantear la hipótesis nula de que el coeficiente de correlación parcial es cero:

$$H_0 : \rho_{YX_j.C} = 0$$

El estadístico de prueba se construye a partir del coeficiente de correlación parcial muestral $r_{YX_j.C}$, del tamaño de la muestra y del número de variables independientes en el conjunto C, $m = k - 1$. Si el p-valor asociado al estadístico de contraste es menor que α, se rechazará la hipótesis nula al nivel de significación α.

9.3.8. Métodos de inclusión de variables por etapas

Los métodos de inclusión de variables paso a paso son procedimientos que de manera secuencial van incluyendo o excluyendo variables en la ecuación de regresión. Parten de la definición del coeficiente de correlación parcial. El coeficiente de correlación parcial entre dos variables dada otra u otras mide el grado de asociación de realción lineal entre esas dos variables una vez que se descuenta la influencia que sobre ella tiene la/s otra/s variable/s.

El método hacia delante: Elige como primera variable a incluir a aquella que presenta mayor correlación lineal simple con la variable dependiente, siempre que explique una parte significativa de los cambios en la variable dependiente(t significativo). A continuación se calculan los coeficientes de correlación parcial entre las variables no incluidas en la ecuación de regresión y la variable dependiente (eliminando la influencia de la ya incluida). Si la variable con mayor coeficiente de correlación parcial aporta una explicación adicional significativa (t significativo) se incluye en la ecuación. Se vuelve a calcular los coeficientes de correlación parcial entre las variables excluidas y la variable dependiente(

eliminando la influencia de las dos variables incluidas) y se continua el proceso hasta que ninguna de las variables excluidas aporte una explicación adicional significativa, momento en el cual el modelo queda como definitivo.

El método hacia atrás: Se introduce en primer lugar todas las variables en la ecuación y se evalúa la significancia de cada una de las variables. Si hay alguna no significativa se elimina aquella que lo sea con menor medida, es decir, aquella cuya estadístico t sea más pequeño. Se reestima el modelo con las restantes variables y se procede del mismo modo hasta que todas las variables incluidas en el modelo sean individualmente significativas.

El método Stepwise: El método Stepwise es un método de construcción de la ecuación de regresión lineal múltiple que selecciona las variables paso a paso. Frente a otros métodos presenta la ventaja de admitir que una variable seleccionada en un paso puede ser eliminada en otro posterior. Es decir, tanto para establecer si la información que aportará una nueva variable al ser seleccionada es significativa como para establecer si la de una variable previamente seleccionada es redundante, habrá que fijar algún criterio, para tal fin analizaremos, mediante el p-valor asociado al estadístico t, si la información proporcionada por cada una de las variables podía ser redundante. En este sentido, un posible criterio de salida sería eliminar aquella variable tal que el p-valor asociado o probabilidad de salida, fuera máximo, siempre y cuando superará un mínimo valor. Análogamente, si la variable X_j es la candidata a ser seleccionada en este paso, un posible criterio de entrada se basa en el p-valor asociado al estadístico t para contrastar la hipótesis

$$H_0 : \beta_j = 0$$

siendo β_j el parámetro asociado a X_j en el supuesto caso de que fuera seleccionada. En dicho caso, la ecuación se construiría con X_j y todas las previamente seleccionadas. Si el p-valor o probabilidad de entrada, es menor que un determinado valor crítico la variable será seleccionada.

Con la finalidad de que una variable no pueda entrar y salir de la ecuación en dos pasos consecutivos, el valor crítico de la probabilidad de salida deber ser mayor que el de la probabilidad de entrada(si no se indica lo contrario, el valor crítico de la probabilidad de entrada será igual a 0.05, mientras que el de la probabilidad de salida será igual a 0.01). En cualquier caso, para evitar que el proceso de selección se convierta en un proceso cíclico, es conveniente establecer un límite para

el número de pasos; si no se indica lo contrario, el doble de el número de variables independientes.

Otra ventaja del método Stepwise, es que el proceso de selección puede comenzar a partir de la ecuación construida con un subconjunto de variables independientes e, inclusive, con todas ellas. En dicho caso, el proceso comenzaría eliminando variables. El hecho de introducir simultáneamente dos o más presenta el riesgo de que alguna de ellas pueda ser combinación lineal de las restantes. En dicho caso, los estimadores de los parámetros del modelo no serán fiables. Para evitar esta situación, se utilizará el criterio de la tolerancia.

La tolerancia de una variable X_j con las variables restantes, se define como:

$$Tol_j = 1 - R_j^2$$

Donde R_j^2 es el cuadrado del coeficiente de correlación múltiple entre X_j y $X_1, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1} \cdots, X_k$. Si el valor de la tolerancia es próximo a cero, la variable X_j será combinación lineal de las restantes variables, si es próximo a uno, la variable X_j puede reducir la parte de la variabilidad de Y no explicada por las restantes variables independientes. Teniendo en cuenta esta definición, antes de construir la ecuación con todas las variables del subconjunto, se analizará la tolerancia de cada variable con las restantes. Si la tolerancia para una variable es muy pequeña, será excluida de la ecuación.

El criterio de tolerancia puede ser utilizado, como un criterio adicional a la probabilidad de entrada. En la construcción de la ecuación de regresión, para que la variable candidata a ser seleccionada en un paso pueda serlo, la tolerancia con las variables incluidas en la ecuación deberá superar un cierto valor mínimo. Por otro lado, al entrar la variable, la tolerancia con las restantes también deberá superar ese mínimo valor.

El factor de incremento de la varianza (FIV) es un indicador de lo que aumenta la varianza del coeficiente de regresión de cada variable al incorporar las otras en el modelo. Cuanto mayor sea la relación entre las variables independientes(mayor multicolinealidad) más variación de los coeficientes, por lo que será mayor FIV. *El FIV es el recíproco del índice de tolerancia:*

$$FIV = \frac{1}{Tol_j}$$

Concretamente, si el proceso comienza sin ninguna variable en la ecuación, el método Stepwise consiste en:

1. En el primer paso se introduce la variable más correlacionada con la dependiente, siempre que verifique el criterio de entrada. En caso contrario, el proceso finalizara sin que ninguna variable sea seleccionada y, en consecuencia, no tendrá sentido construir el modelo de regresión lineal a partir de la información de las variables independientes.
2. En el segundo paso se introduce la variable con mayor coeficiente de correlación parcial con la dependiente, respecto a la independiente introducida en el primer paso, siempre que verifique el criterio de entrada. En caso contrario, el proceso finalizará y el modelo de regresión lineal será un modelo simple construido a partir de la información aportada por la variable independiente introducida en el primer paso.
3. En el paso siguiente se introduce la variable con mayor correlación parcial con la dependiente respecto de las independientes que se encuentran formando parte de la ecuación, siempre que verifiquen el criterio de entrada. Si al introducir una variable, alguna de las previas incluidas verifica el criterio de salida, antes de proceder a la selección de nuevas variables, se eliminarán, paso a paso las variables que verifiquen el criterio de salida.
4. Cuando, ninguna variable en la ecuación verifique el criterio de salida, se vuelve a la etapa 3. La etapa 3 se repite hasta que ninguna de las variables fuera de la ecuación satisfagan el criterio de entrada y ninguna de las variables en la ecuación satisfaga el criterio de salida, o se alcance el máximo número de pasos.

Por otro lado, si el proceso comienza con alguna variable en la ecuación, antes de intentar introducir alguna más, se tratará de eliminar a las que están formando el modelo.

9.3.9. Introducción de variables cualitativas

Si entre las variables independientes se encuentra alguna variable cualitativa, sus valores deben ser recodificados, mediante la creación de nuevas variables numéricas que correspondan en algún sentido a las categorías originales.

En el caso de una variable dicotómica, sus valores se recodifican como 0 y 1. El valor 1 indica la presencia de una cualidad correspondiente a una de las categorías y el valor 0, la ausencia de dicha cualidad, por ende la presencia de la otra. Por ejemplo la variable sexo se recodifica como 1 para hombres y 0 para mujer.

Cuando una variable presenta k categorías, es decir, es policotómica, deberán generarse $k-1$ variables, cada nueva variable tomará valor 1 para una determinada categoría y 0 en el resto, de tal manera que los individuos en una misma categoría tomarán valor 1 en una misma variable y cero en las restantes. La categoría no considerada o referencia, estrá representada por el valor 0 en todas las nuevas variables. Mediante este esquema de codificación, los coeficientes de las nuevas variables reflejarán el efecto de las categorías, respecto al de la categoría referencia.

Por ejemplo considere la variable Z que refleja el grado de aceptación de un producto por parte del consumidor, definida como:

$$Z = \begin{cases} malo \\ regular \\ bueno \\ excelente \end{cases}$$

Como Z asume cuatro categorías, entonces es necesario generar 3 nuevas variables, recodificadas en la siguiente tabla:

	malo	regular	bueno	excelente
Z_1	1	0	0	0
Z_2	0	1	0	0
Z_3	0	0	1	0

la categoría de referencia representa la clasificación excelente, es decir,

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$$

9.3.10. Cambio de escala

Las unidades de medida utilizadas en las variables afectan a la estimación del modelo en relación con algunos resultados, mientras que otros son inalterable ante cambios en la unidad de medida.

Si se ha efectuado la estimación del modelo en una determinada unidad de medida, digamos bolívares, y deseamos conocer como afecterá a la estimación un cambio de escala en alguna o algunas variables, por ejemplo dólares, podemos usar la siguiente relación:

$$\widehat{\beta}^* = p\mathbf{P}^{-1}\widehat{\beta}$$

Siendo p el cambio de escala correspondiente a la variable respuesta, $\mathbf{P}$ la matriz $(k+1)\times(k+1)$ correspondiente a los cambios de escala efectuados en las variables explicativas, de manera que la relación entre la matriz $\mathbf{X}$ y

el vector y de las variables originales con a matriz $\mathbf{X}^*$ y el vector y^* de las variables transformadas es:

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{XP} \qquad y^* = py$$

donde p es un escalar y $\mathbf{P}$ es una matriz diagonal definida por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_k \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la relación de b_i^* en el modelo transformado y el b_i del modelo original es:

$$b_i^* = \frac{p}{p_i} b_i \qquad i = 0, 1, \cdots, k \qquad p_0 = 1$$

De esta relación se deduce que el cambio de escala en una variable explicativa no afecta a la estimación del modelo si dicho cambio se produce también en la variable respuesta $p_i = p$.

La relación entre las matrices de covarianza de los estimadores es:

$$V(\widehat{\beta}^*) = p^2 \mathbf{P}^{-1} V(\widehat{\beta}) \mathbf{P}^{-1}$$

de manera que las relaciones entre las varianzas estimadas de los coeficientes de los modelos son:

$$S^2_{b_j^*} = S^2_{b_j} \frac{p^2}{p_j^2} \qquad j = 0, 1, \cdots, k$$

Por otro lado, la realción entre las varianzas estimadas del error de predicción es:

$$S^2_{\widehat{y}^*} = p^2 S^2_{\widehat{y}}$$

El cambio de escala no afecta a los demás estadísticos del modelo.

9.4. Regresión lineal con SPSS

El SPSS mediante los comandos

```
Analizar ---> Regresión --> Lineal
```

permite estimar los coeficientes del modelo de regresión lineal simple, además, estima los indicadores de bondad de ajuste del modelo, así, como verificar los supuestos teóricos en los que se basa el modelo.

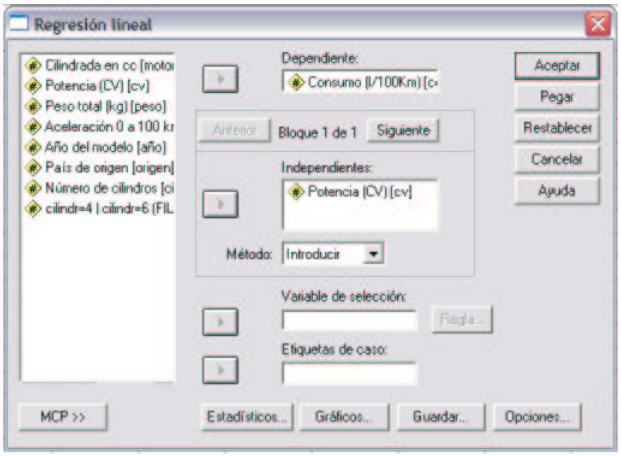

Figura 9.3: Regresión: caja de diálogo

La caja de diálogo asociada a la secuencia de comandos anterior, se ilustra en la figura 9.3:

A continuación describiremos cada de los campos de la caja de diálogo anterior.

Dependiente: variable cuyos valores se desea predecir o resumir.

Independientes: variables utilizadas para predecir el valor de la variable dependiente. También se denominan variables predictoras o variables explicativas. Para poder ejecutar este procedimiento, la lista debe contener al menos una variable independiente. En los modelos de regresión lineal simple sólo se debe seleccionar una variable independiente.

Método: permite seleccionar el método por el cual se introducen las variables independientes en el análisis. Permite construir una variedad de modelos de regresión a partir del mismo conjunto de variables. Para obtener Ayuda sobre un método en particular, seleccione el método y pulse el botón derecho del ratón.

En el modelo de regresión lineal simple este campo no se ejecuta, ya que por defecto, al existir solamente una variable independiente en el modelo, la selección de ella es automática.

Variable de selección: elija una variable de selección que limite el análisis a un subconjunto de casos que tengan un valor particular para esta variable.

La variable de selección debe ser una variable categoríca, de esta forma los posible elementos de selección son algunos de sus valores o categorías.

Etiqueta de casos: designa una variable para identificar los puntos de los gráficos. Para cada punto de un diagrama de dispersión puede utilizar la herramienta de selección de puntos y mostrar el valor de la variable de etiquetas de casos correspondiente al caso seleccionado.

MCP: permite obtener un modelo de mínimos cuadrados ponderados. Los puntos de los datos se ponderan por los inversos de sus varianzas. Esto significa que las observaciones con varianzas grandes tienen menor impacto en el análisis que las observaciones asociadas a varianzas pequeñas.

Estadístico: solicita resultados estadísticos opcionales, incluyendo los coeficientes de regresión, descriptivos, estadísticos de ajuste del modelo, la prueba de Durbin-Watson y diagnósticos de la colinealidad.

La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 9.4:

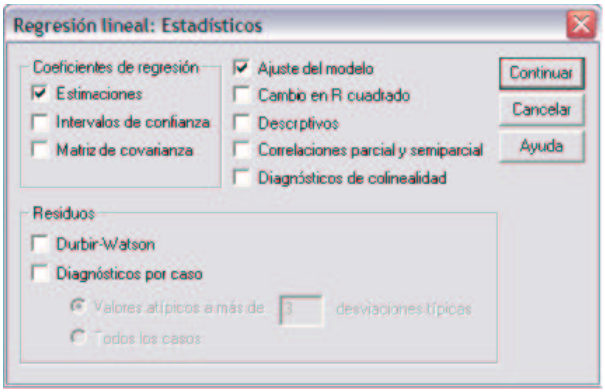

Figura 9.4: Regresión: estadísticos

Los campos de interés de la caja de diálogos anterior se describen a continuación:

Coeficientes de regresión: permite estimar los coeficientes del modelo de regresión y estadísticos relacionadas con ellos. Entre otros:

Estimación: permite estimar los parámetros del modelo de regresión y medidas relacionadas con ellos, obteniéndose elementos para verificar la significancia de cada uno de ellos.

Intervalos de confianza: intervalos de confianza al 95 % para los coeficientes del modelo de regresión lineal.

Matriz de covarianza: muestra las matrices de covarianza y de correlaciones. La matriz de varianza-covarianza de los coeficientes de regresión muestra las varianzas en la diagonal y las covarianzas por debajo y por encima de la diagonal.

Ajuste del modelo: muestra la R múltiple, la R cuadrado, la R cuadrado corregida y el error típico. También, una tabla de ANOVA muestra los grados de libertad, las sumas de cuadrados, las medias cuadráticas, el valor de F y el nivel crítico de la F.

Cambios en R cuadrado: cambio en el estadístico R cuadrado que se produce al añadir o eliminar una variable independiente. Si es grande el cambio en R cuadrado asociado a una variable es grande, esto significa que esa variable es un buen predictor de la variable dependiente.

Descriptivos: muestra las medias de las variables, las desviaciones típicas y la matriz de correlaciones con las probabilidades unilaterales.

Correlaciones parciales y semiparciales: muestra las correlaciones de orden cero, semiparcial y parcial. Los valores del coeficiente de correlación van de -1 a 1. El signo del coeficiente indica la dirección de la relación y su valor absoluto indica la fuerza de la relación. Los valores mayores indican que la relación es más estrecha.

Diagnóstico de colinealidad: muestra las tolerancias para las variables individuales y una variedad de estadísticos para diagnosticar los problemas de colinealidad. La colinealidad (o multicolinealidad) es una situación no deseable en la que una de las variables independientes es una función lineal de otras variables independientes.

Residuos: este campo permite estudiar algunas de las propiedades básicas de los residuos del modelo de regresión. Entre otras se tiene:

Durbin-Watson: muestra la prueba de Durbin-Watson para los residuos correlacionados serialmente y estadísticos de resumen para los residuos y los valores pronosticados.

Diagnóstico por casos: genera diagnósticos por casos, para todos los casos que cumplan el criterio de selección (los valores atípicos por encima de n desviaciones típicas).

Gráficos: solicita gráficos opcionales, incluyendo: gráficos de dispersión, histogramas, gráficos de probabilidad normal y diagramas de los valores atípicos. Pueden seleccionarse diferentes gráficos simultáneamente, utilizando la variable dependiente, así, como una lista de variables relacionadas con los valores predichos y los residuos, todas estas variables son generadas de manera automática por el sistema. Este conjunto de gráficos es de gran utilidad, al verificar los supuestos teóricos en que se fundamenta el modelo de regresión lineal simple.

La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 9.5:

Figura 9.5: Regresión: Gráficos

Los campos de interés de la caja de diálogos anterior se describen a continuación:

Lista de variables: la comprobación de los supuestos teóricos del modelo se lleva a cabo a través del análisis de los residuos, para tal fin son creados un conjunto de variables temporales, las cuales están disponibles en este comando:

***ZPRED:** corresponde a los valores tipificados de las estimaciones de la variable dependiente, mediante el modelo de regresión lineal simple.

***ZRESID:** variable asociada a los residuos estimados mediante el modelo de regresión lineal simple.

***DRESID:** variable asociada a los residuos estimados mediante el modelo de regresión lineal simple, eliminados.

***ADJPRED:** corresponde a los valores tipificados de las estimaciones de la variable dependiente, mediante el modelo de

regresión lineal simple, ajustados, para un caso es el valor predicho cuando ha sido excluido.

***SRESID:** variable asociada a los residuos estimados mediante el modelo de regresión lineal simple, estudentizado.

***SDRESID:** variable asociada a los residuos estimados mediante el modelo de regresión lineal simple, eliminados estudentizado.

Dispersión 1 de 1: permite obtener hasta nueve diagramas de dispersión diferentes. Seleccione una variable X y una variable Y. Para solicitar gráficos adicionales, pulse en **Siguiente** y repita el proceso. **Previo** muestra las variables para el diagrama de dispersión de la capa anterior.

Generar todos los gráficos parciales: este campo permite generar gráficos parciales de dispersión cuando existen más de una variable independiente.

Residuos: permite construir gráficos de interés basados en los residuos tipificados:

Histogramas: crea un histograma de los residuos tipificados con una curva normal superpuesta.

Gráficos de probabilidad normal: muestra un gráfico de probabilidad normal de los residuos tipificados. Se usa para comprobar la normalidad. Si la variable se distribuye normalmente, los puntos representados forman una línea recta diagonal.

Guardar: permite guardar los valores pronosticados, los residuos y medidas relacionadas como nuevas variables que se añaden al archivo de datos de trabajo. En los resultados, una tabla muestra el nombre de cada nueva variable y su contenido.

La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 9.6:

Los campos de interés de la caja de diálogos anterior se describen a continuación:

Valores pronosticados: guarda información relacionada con los valores de la variable dependiente estimados mediante el modelo de regresión lineal simple.

No tipificados: valor que predice el modelo para la variable dependiente.

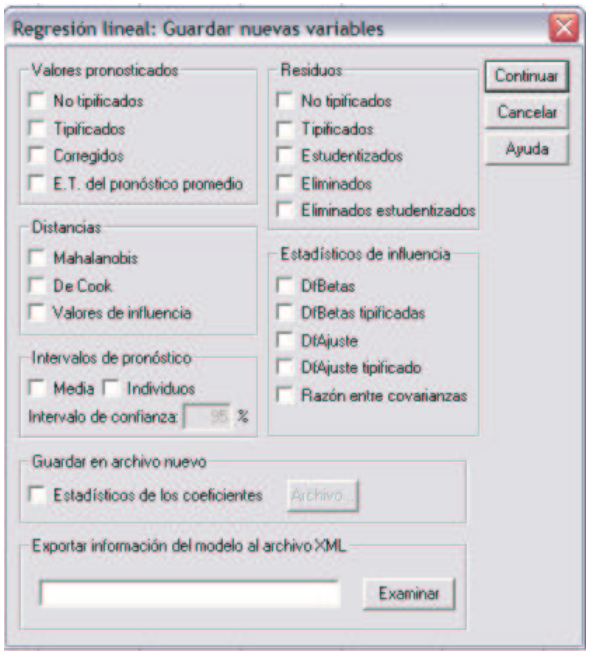

Figura 9.6: Regresión: Guardar

Tipificados: transformación de cada valor pronosticado a su forma tipificada. Es decir, se sustrae el valor pronosticado medio al valor pronosticado y el resultado se divide por la desviación típica de los valores pronosticados. Los valores pronosticados tipificados tienen una media de 0 y una desviación típica de 1.

Corregidos: valor pronosticado para un caso cuando dicho caso no se incluye en los cálculos de los coeficientes de regresión.

E.T. del pronostico promedio: error típico de los valores pronosticados. Estimación de la desviación típica del valor promedio de la variable dependiente para los casos que tienen valores iguales en las variables independientes.

Residuos: genera nuevas variables asociadas a los residuos del modelo de regresión lineal simple

No tipificados: diferencia entre un valor observado y el valor pronosticado por el modelo.

Tipificados: el residuo dividido por una estimación de su error típico. Los residuos tipificados, que son conocidos también como los residuos de Pearson o residuos estandarizados, tienen una media de 0 y una desviación típica de 1.

Estudentizado: residuo dividido por una estimación de su desviación típica que varía de caso en caso, dependiendo de la distancia de los valores de cada caso en las variables independientes respecto a las medias en las variables independientes.

Eliminados: residuo para un caso cuando éste se excluye del cálculo de los coeficientes de la regresión. Es igual a la diferencia entre el valor de la variable dependiente y el valor pronosticado corregido.

Eliminados estudentizado: residuo eliminado para un caso dividido por su error típico. La diferencia entre un residuo eliminado estudentizado y su residuo estudentizado asociado indica la diferencia que implica el eliminar un caso sobre su propia predicción.

Distancias: los estimadores de las distancias entre los casos inusuales son guardadas como variables

Mahalanobis: medida de cuánto difieren los valores de un caso en las variables independientes respecto al promedio para todos los casos. Una distancia de Mahalanobis grande identificará a un caso que tenga valores extremos en una o más de las variables independientes.

De Cox: medida de cuánto cambiarían los residuos de todos los casos si se excluyera un caso determinado del cálculo de los coeficientes de regresión. Una Distancia de Cook grande indica que la exclusión de ese caso del cálculo de los estadísticos de regresión hará variar substancialmente los coeficientes.

Valores de influencia: medida de la influencia de un punto en el ajuste de la regresión. La influencia centrada varía entre 0 (no influye en el ajuste) y (N-1)/N.

Estadísticos de influencia: las distancias estimadas para detectar casos influyentes, son guardadas como nuevas variables.

Dfbeta: la diferencia en el valor de beta es el cambio en el valor de un coeficiente de regresión que resulta de la exclusión de un caso particular. Se calcula un valor para cada término del modelo, incluyendo la constante.

Dfbeta tipificadas: valor de la diferencia en beta tipificada. El cambio tipificado en un coeficiente de regresión cuando se

elimina del análisis un caso particular. Puede interesarle examinar aquellos casos cuyos valores absolutos sean mayores que 2 dividido por la raíz cuadrada de N, donde N es el número de casos. Se calcula un valor para cada término del modelo, incluyendo la constante.

Dfajuste: la diferencia en el valor ajustado es el cambio en el valor pronosticado que resulta de la exclusión de un caso particular.

Dfajuste tipificado: diferencia tipificada en el valor ajustado. El cambio, tipificado, en el valor pronosticado que resulta de la exclusión de un caso particular. Puede interesarle examinar aquellos valores tipificados cuyo valor absoluto sea mayor que 2 dividido por la raíz cuadrada de p/N, donde p es el número de variables independientes en la ecuación y N es el número de casos.

Razón entre covarianzas: razón del determinante de la matriz de covarianza con un caso particular excluido del cálculo de los coeficientes de regresión, respecto al determinante de la matriz de covarianza con todos los casos incluidos. Si la razón se aproxima a 1, el caso no altera significativamente la matriz de covarianza.

Opciones: permite controlar los criterios por los que se eligen las variables para su inclusión o exclusión del modelo de regresión, suprimir el término constante y controlar la manipulación de los valores perdidos.

La caja de diálogo asociada a este campo se ilustra en la figura 9.7:

Los campos de interés de la caja de diálogos anterior se describen a continuación:

Criterios del método por pasos: este comando permite definir los criterios usados en los métodos por paso para la selección y exclusión de las variables independientes relevantes en el modelo.

Usar probabilidad de F: una variable se introduce en el modelo si el nivel de significación de su valor de F es menor que el valor de entrada, y se elimina si el nivel de significación de su valor de F es mayor que el valor de salida. La entrada debe ser menor que la salida y ambos valores deben ser positivos. Para introducir más variables en el modelo, eleve el valor de entrada. Para eliminar más variables del modelo, disminuya el valor de salida.

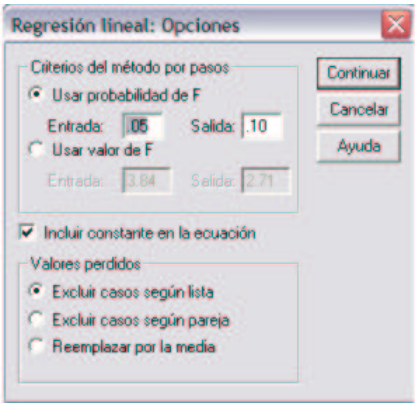

Figura 9.7: Regresión: Opciones

Usar un valor F: una variable se introduce en el modelo si su valor de F es mayor que el valor de entrada, y se elimina si su valor de F es menor que el valor de salida. La entrada debe ser mayor que la salida y ambos valores deben ser positivos. Para introducir más variables en el modelo, disminuya el valor de entrada. Para eliminar más variables del modelo, eleve el valor de salida.

Incluir constante en la ecuación: habitualmente el modelo de regresión contiene un término constante. Para eliminar este término y obtener la regresión a través del origen, desactive esta opción.

Valores perdidos: define el tratamiento que se dará a los valores perdidos

Excluir casos según lista: excluye los casos que tienen valores perdidos en cualquiera de las variables utilizadas en cualquiera de los análisis.

Excluir casos según pareja: excluye del análisis los casos que tengan valores perdidos en cualquiera (o en ambas) de las variables de una pareja implicada en el cálculo de un estadístico específico.

Reemplazar por la media: sustituye los valores perdidos por la media de la variable.

9.5. Solución de Problemas

Ejemplo 9.1 *A partir de la información obtenida de un ensayo de campo sobre cultivo de soya, resumido en el archivo* **Soya.sav**. *Donde las variables representan:*

Peso = peso total de las semillas

NPL = número de plantas por metro lineal

NVL = número de vainas por metro lineal

PVS = peso de vainas con semillas

PVS2 = peso de vainas con 2 semillas

PVS3 = peso de vainas con 3 semillas

P100V = peso de 100 vainas

Se desea construir un modelo de regresión lineal múltiple que exprese la variable peso total de las semillas como función lineal de las restantes variable.

Para establecer el modelo de regrsión lineal deseado, mediante la aplicación informática SPSS, se ejecuta la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Regresión --> lineal
```

en la caja de comandos asociada seleccione los campos:

```
Dependiente: Peso total
Independientes: NPL, NVL,PVS, PVS2,PVS3
Modelo: pasos sucesivos
Estadísticos:
             Coeficientes de Regresión:  estimaciones
             Ajuste del modelo
             Diagnósticos de colinealidad
             Residuos: Durbin-Watson
 Continuar
Gráficos:
         y: Zresiduos
         x: Zpredicciones
         Gráficos de probabilidad normal
 Continuar
Guardar:
```

```
        Residuos no tipificados
        Distancia de Cook
  Continuar
Aceptar
```

El reporte de la secuencia de comandos será analizada a continuación. Para el diseño del modelo de regresión lineal múltiple se utilizara el método Stepwise, el criterio de probabilidad de entrada F es menor o igual a 0.05, mientras que el criterio de salida posee probabilidad F mayor o igual a 0.1.

Modelo 1

La construcción del modelo se inicia con la introducción de la variable PVS2, la información sobre el modelo se resume en la siguiente tabla:

R	R^2	R ajustado	Err. típ.
0.8366	0.700	0.693	36.7476

Tabla 9.3: Resumen del modelo

La variable PVS2 explica el 70 % de la variabilidad de la variable dependiente Peso, dada la alta correlación entre ellas corroborado por el gráfico de la figura 9.8.

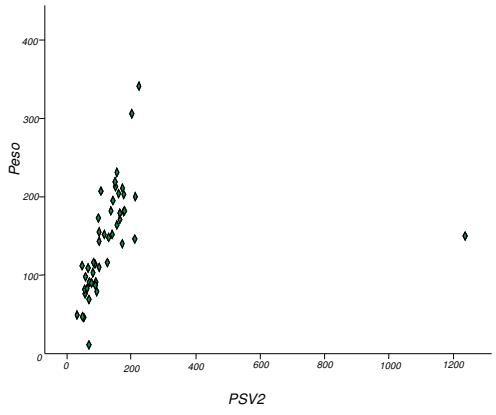

Figura 9.8: Diagrama de dispersión

La tabla de análisis de la varianza del modelo 1, muestra el valor del estadístico $F = 104{,}430$, valor alto, con p-valor asociado igual a 0.000, luego al nivel significación del 1 % se rechaza la hipótesis nula de incorrelación entre las variables que conforman el modelo.

Fuente	S.C.	Gl.	M.C.	F	p-valor
Regresión	144455.01	1	144455.01		
residual	62042.989	47	1320.064	104.430	0.000
total	206498.00	48			

Tabla 9.4: Tabla de análisis de la varianza

La tabla **Coeficientes del modelo** contiene la información asociada a los coeficientes estimados del modelo de regresión lineal simple, como el p-valor asociado al estadístico t del coeficiente de la variable independiente es menor que 0.01, se rechaza la hipótesis nula $\beta_1 = 0$, es decir la variable PVS2 es significativa para explicar el peso. Por otra parte, el p-valor asociado al estadístico t del coeficiente del término constante es mayor que 0.05, no se rechaza la hipótesis nula $\beta_0 = 0$, para determinar si el modelo pasa por el origen, reflejado en este ańalisis, es necesario estudiar los intervalos de confianza, en el caso en que el modelo final se el modelo 1.

Variable	Coeficiente	Err. Típ	Beta	t	p-valor
Constante	17.595	13.026		1.351	0.183
PVS2	1.071	0.102	0.836	10.461	0.000

Tabla 9.5: Coeficientes estimados

Los estadísticos de colinealidad asociados al modelo 1 son iguales a uno, ya que sólo contiene una variable independiente.

Tolerancia	VIF
1	1

Tabla 9.6: Estadísticos de colinealidad

En el próximo paso se seleccionara la variable a entrar al modelo, para tal fin, se seleccionara aquella variable excluida del modelo con coeficiente de correlación parcial de mayor valor absoluto. En la table de variables excluidas se observa que la variable PVS3 presenta mayor coeficiente de correlación parcial igual a 0.453, su p-valor , probabilidad de entrada, es 0.001, menor que 0.05 criterio F de entrada, así, PVS3 no sólo es candidata a entrar al modelo, ella formará parte del modelo 2.

Modelo 2

El modelo 2 expresa a la variable dependiente peso como combinación lineal de las variables PVS2 y PVS3 más el término independiente, la información del ajuste del modelo se resume en la tabla siguiente

Variable	beta entrada	t	p-valor	Correlación Parcial
NPL	0.018	0.153	0.879	0.023
NPVL	0.258	1.355	0.182	0.196
PVS	-0.015	-0.126	0.900	-0.019
PVS3	0.400	3.443	0.001	0.453
P100V	0.249	2.929	0.005	0.396

Tabla 9.7: Variables excluidas

R	R^2	R ajustado	Err. típ.
0.872	0.762	0.751	32.7476

Tabla 9.8: Resumen del modelo

Así, las variables independientes que forman parte del modelo explican el 76,2 % de la variabilidad del peso. es decir, al ingresar la variable PVS3 al modelo existe un incremento del 6,2 % en la explicación de la variabilidad del peso por el modelo, lo cual es corroborado por la tendencia lineal positiva en la relación lineal entre el peso y PVS3 reflejado en figura 9.9.

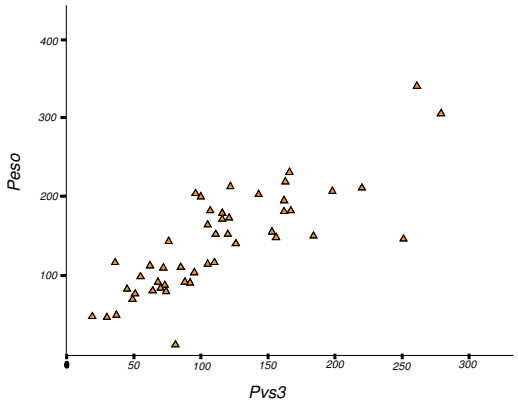

Figura 9.9: Diagrama de dispersión

Al utilizar la tabla de análisis de la varianza para contrastar la hipótesis nula:

$$H_0 : \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

se observa que el valor del estadístico $F = 73{,}218$ es elevado, su p-valor es igual a 0.000, menor que 0.01, es decir, al nivel de significación del 1 % se

rechaza H_0, en otras palabras, las variables PVS2 y PVS3 están incorrelacionadas, y su contribución conjunta en el modelo es significativa.

Fuente	S.C.	Gl.	M.C.	F	p-valor
Regresión	157167.46	2	78583.728		
residual	49330.544	46	1072.403	73.278	0.000
total	206498.00	48			

Tabla 9.9: Tabla de análisis de la varianza

Para analizar la contribución individual de cada una de las variables independientes por separado, en el modelo, se contrasta la hipótesis nula:

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad j = 1, 2$$

a partir de la información contenida en la tabla de los coeficientes estimados del modelo se tiene:

Variable	Coeficiente	Err. Típ	Beta	t	p-valor
Constante	14.788	11.769		1.257	0.0215
PVS2	0.670	0.149	0.523	4.501	0.000
PVS3	0.438	0.127	0.400	3.443	0.001

Tabla 9.10: Coeficientes estimados

- el p-valor asociado al estadístico t del coeficiente estimado para cada una de las variables independientes es menor que 0.01, es decir, al nivel de significancia del 1 % se rechaza la hipótesis nula.
- en conclusión cada una de las variables contribuye significativamente en la explicación de la variabilidad de la variable dependiente.

Para conocer si las variables independientes son combinación lineal una de las otras, usamos la tolerancia, el valor de la tolerancia es de 0.385, el factor de incremento de la varianza 2.598, diferente de 5, entonces las variable no son colineales.

Variable	Tolerancia	VIF
PVS2	0,385	2.598
PVS3	0,385	2.598

Tabla 9.11: Estadísticos de colinealidad

Como el modelo 2 sólo presenta 2 variables independientes no es necesario eliminar variable.

De entre las variables independientes excluidas del modelo, la candidata a entrar es la que presenta mayor correlación parcial en valor absoluto

Variable	beta entrada	t	p-valor	Correlación Parcial
NPL	-0.048	-0.459	0.648	-0.68
NPVL	-0.182	-0.819	0.417	-0.121
PVS	0.040	0.360	0.721	0.054
P100V	0.218	2.811	0.007	0.387

Tabla 9.12: Variables excluidas

En nuestro caso es 0.752 asociado a P100V, como su p-valor es igual a 0.007, probabilidad de entrada, es menor que 0.05 criterio F de entrada, en consecuencia no sólo es candidata, sino que entrará en el modelo 3.

Modelo 3

El modelo 3 expresa al peso como combinación de las variables PVS2, PVS3, P100V y se resume como:

R	R^2	R ajustado	Err. típ.
0.893	0.797	0.783	30.5360

Tabla 9.13: Resumen del modelo

Como el valor de R se incrementa respecto al modelo 2, se observa que las variables peso y P100V están relacionadas de manera lineal positiva, lo cual se ilustra en la figura 9.10.

El valor $R^2 = 0{,}797$ indica que, las variables independientes que forman parte del modelo explican el 79,7 % de la variabilidad del peso. es decir, al ingresar la variable P100V al modelo existe un incremento del 3,6 % en la explicación de la variabilidad del peso por el modelo,respecto al modelo 2.

Para contrastar la hipótesis nula:

$$H_0 : \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = 0$$

Usaremos el estadístico F de la tabla de análisis de la varianza

El valor $F = 58{,}819$ es elevado, su p-valor es igual a 0.000, menor que 0.01, es decir, al nivel de significación del 1 % se rechaza H_0, en otras palabras, las variables PVS2, PVS3,y P100V están incorrelacionadas, y su contribución conjunta en el modelo es significativa.

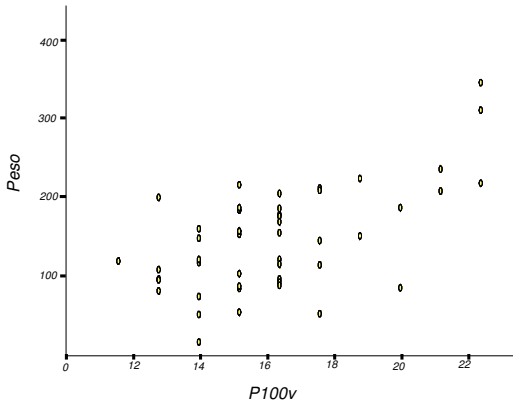

Figura 9.10: Diagrama de dispersión

Fuente	S.C.	Gl.	M.C.	F	p-valor
Regresión	164537	2	54845.976		
residual	41960.072	45	932.446	58.819	0.000
total	206498.00	48			

Tabla 9.14: Tabla de análisis de la varianza

Para analizar la contribución individual de cada una de las variables independientes por separado, en el modelo, se contrasta la hipótesis nula:

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

a partir de la información contenida en la tabla de los coeficientes estimados del modelo se tiene:

Variable	Coeficiente	Err. Típ	Beta	t	p-valor
Constante	-71.151	32.477		-2.1917	0.034
PVS2	0.571	0.143	0.4463	3.988	0.000
PVS3	0.398	0.119	0.363	3.329	0.002
P100V	6.427	2.286	0.218	2.811	0.007

Tabla 9.15: Coeficientes estimados

Como el p-valor asociado a cada uno de los coeficientes estimados, inclusive el término independiente, es menor que 0.05, al nivel de significación del 5 % se rechaza la hipótesis nula $\beta_j = 0 \quad j = 1, 2, 3$, en conclusión cada variable de manera individual es significativa en la explicación de la variación de

la variable dependiente. Por otra parte como todos los p-valores son menores que 0.1 ninguna de las variables puede ser eliminada del modelo.

En el próximo paso se selecciona la variable a entrar al modelo, para tal fin, al analizar la probabilidad de entrada(p-valor) asociado al coeficiente de correlación parcial de las variables excluidas, se observa que ninguno de ellos es menor que 0.05, por lo tanto ninguna de las variables excluidas puede ingresar al modelo

Variable	beta entrada	t	p-valor	Correlación Parcial
NPL	0.068	0.637	0.528	0.096
NPVL	0.209	0.836	0.408	0.125
PVS	0.105	1.012	0.317	0.151

Tabla 9.16: Variables excluidas

En consecuencia, dado que ninguna variable más puede ser eliminada o seleccionada, el proceso finaliza con el modelo 3; parece que el modelo construido no puede ser mejorado con la información disponible, pero como los residuos explican el 20,3 % de la variabilidad de la variable dependiente, se recomienda para futuros ensayos considerar otras variables independientes, además de las aquí consideradas. El modelo final se expresa como:

$$y_i = -71{,}151 + 0{,}571PVS2_i + 0{,}398PVS3_i + 6{,}427P100V_i + \xi_i$$

ANÁLISIS DE LOS SUPUESTOS

Normalidad y homoscedasticidad de los residuos

Para corroborar el supuesto de residuos distribuidos $\mathbb{N}(0, \sigma^2)$, se utilizarán gráficos de caja, de probabilidad y de dispersión de los residuos estandarizados. El diagrama de caja ilustra la distribución de los residuos centrada en cero, simétrica con un valor extremo y un outlier, así, podemos afirmar que los errores siguen una distribución simétrica de media cero

El diagrama de probabilidad $P - P$ muestra los residuos agrupados entorna a la recta $y = x$, lo cual permite afirmar que los residuos se distribuyen de manera normal, con media cero.

La prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov corrobora la afirmación anterior:

Estadístico	G.L.	P-valor
0.111	49	0.174

Tabla 9.17: Prueba K-S

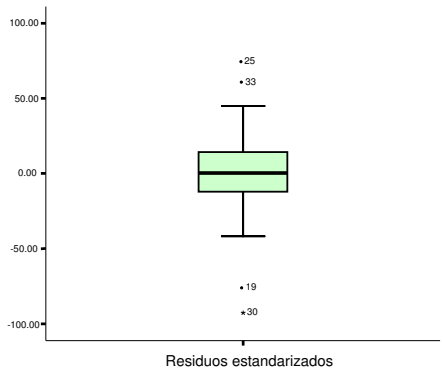

Figura 9.11: Diagrama de caja

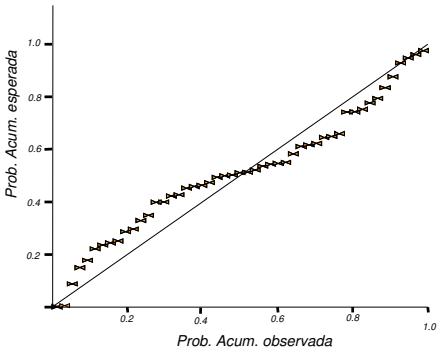

Figura 9.12: Gráfico de Probabilidad

Como el p-valor asociado a la prueba de Kolmogorov-Smirnov es mayor que 0.05, no existen evidencias estadísticas aportadas por los residuos para rechazar la hipótesis de normalidad.

Para verificar la condición de homoscedasticidad de los residuos, es decir

$$Var(\xi_i) = \sigma^2 \quad \forall i$$

nos basamos en la información aportada por el diagrama de dispersión de los residuos tipificados versus los valores estimados por el modelo, la nube de puntos se agrupa en una banda horizontal centrada en $\widehat{y} = 0$ comprendida entre -1 y 1, sin seguir patrón de agrupación alguno; salva el valor extremo y el outlier detectado en el diagrama de caja, así, podemos afirmar que los residuos poseen varianza constante.

Una manera más precisa de verificar este supuesto es aplicando la prueba de Levene a los residuos, el reporte de la prueba se resume en la tabla

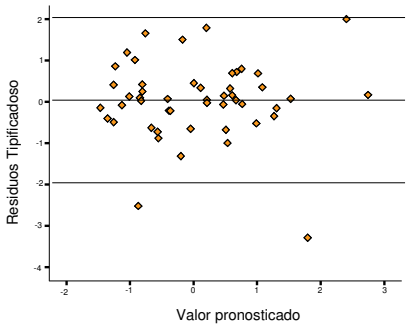

Figura 9.13: Errores vs. Pronisticos

Estadístico	GL1.	GL2	P-valor
2.308	2	46	0.111

Tabla 9.18: Prueba de Levene

Como el p-valor asociado al contraste es mayor que el nivel de confianza, no se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad de los residuos del modelo de regresión lineal.

Autocorrelación

Para estudiar la posible autocorrelación entre residuos asociados a cada uno de los elementos de la muestra, se utilizara el estadístico de Durbin-Watson cuyo valor es 2.06, mayor que el umbral 1.67, así, no existen indicios aportados por la muestra para rechazar la hipótesis de residuos independientes al nivel de significación del 5 %. Recordemos que para cada nivel se significancia α y k variables explicativas existen dos valores extremos asociados al estadístico de Durbin-Watson, d_L y d_u si el valor muestral es menor que d_L existe autocorrelación, si es mayor que d_u no existe autocorrelación, en otro caso no existe conclusión.

El diagrama de autocorrelación de los residuos del modelo de regresión lineal, ilustrado en la figura 9.14 no presenta corte de los coeficientes con las líneas representativas de los límites inferior y superior del intervalo de confianza, razón por la cual se corrobora la no autocorrelación entre los residuos del modelo.

Análisis de multicolinealidad

El análisis de multicolinealidad se basa en el estudio de los factores de incremento de la varianza VIF, contenido en la tabla siguiente:

Ninguno de los valores de VIF supera el umbral de 5, por lo tanto no existe multicolinealidad entre las variables explicativas.

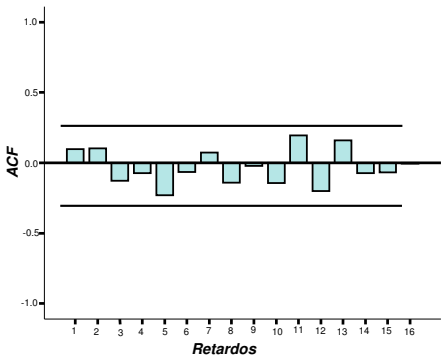

Figura 9.14: Diagrama de auocorrelación

Variable	G.L.	Tolerancia	VIF
PVS2	1	0.362	2.765
PVS3	1	0.379	2.636
P100V	1	0.752	1.330

Tabla 9.19: Factores de incremento de la varianza

Ejemplo 9.2 *Los siguientes datos se refieren a la economía de un país en el periodo 1980-2000 y varían en miles de millones de unidades monetarias constantes en 1990.*

> *Q mide el producto territorial bruto en miles de millones de dólares en 1990*
>
> *K mide el stock de capital utilizada en miles de millones de dólares en 1990*
>
> *L datos de empleo en millones de personas ocupadas*

Se desea:

- *Estimar un modelo de regresión lineal que exprese la variable Q como función lineal de K y L.*
- *Efectuar el cambio de escala de manera tal que el modelo estimado se exprese en millones de dólares en 1990.*

Estimación del modelo

Variable	Coeficiente	Error Típico	t	sig
Constante	-163.376	15.9711	-10.2295	0.000
K	0.0921767	0.0709338	1.29947	0.2102
L	14.9955	1.47422	10.1718	0.000

Tabla 9.20: Coeficientes estimados

Usando mínimos cuadrados ordinarios se estimaron los coeficientes del modelo lineal:

La ecuación de ajuste de los datos que describe a Q como función lineal de las 2 variables independientes es:

$$Q_i = -163{,}376 + 0{,}0921767K_i + 14,9955L_i + \xi_i$$

Se observa que el mayor p-valor asociado al estadístico t de estimación de los coeficientes es 0.2102, perteneciente a la variable K, como el p-valor es mayor que 0.10, esta variable no es estadísticamente significativa al nivel de confianza del 99 %, en consecuencia puede considerarse su eliminación del modelo.

Como el p-valor en la tabla de Análisis de la varianza es menor que 0.01, existe una relación entre las variables, estadiísticamente significativa al nivel de confianza del 99 %.

Fuente de Variación	Suma de cuadrados	G.L.	Media cuadrática	F	Sig
Regresión	1514.54	2	757,271		
Residual	78.5658	18	4.3677	17350	0.000
Total	1593.11	20			

Tabla 9.21: Tabla ANOVA

El estadístico R^2 indica que el modelo de ajuste explica el 95,0684 % de la variabilidad de Q. El estadístico R^2 ajustado, el cual es más susceptible para comparar modelos con diferentes números de variables independiente, predice un 94,5204 % de la variabilidad de Q.

El estadístico de Durbin-Watson(DW) asociado a los residuos, determina la existencia de autocorrelación significativa, como su valor es menor que 1.4, la cota inferior de la estimación para $\alpha = 0{,}01$ y dos variables independientes, entonces existen fuertes indicios de correlación serial.

Cambio de escala

R	$\overline{R}^2$	R^2	S^2	DW
0.97503	0.945204	0.950684	2.0892	0.801571

Tabla 9.22: Resumen del modelo

En el modelo estimado el producto territorial bruto y el stock de capital utilizado se expresa en miles de millones de dólares en 1990, mientras que la información sobre el empleo se expresa en miles de personas ocupadas. Si deseamos expresar las dos primeras variables en millones de dólares y la tercera variable permanece en las unidades originales, entonces

$$p = p_1 = 1000, \quad p_2 = 1$$

La matriz de cambio de escala se expresa como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con inversa

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de coeficientes estimados para el nuevo modelo es:

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}^* &= \mathbf{P}^{-1}\widehat{\beta} = 1000 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \widehat{\beta} \\ &= \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} * \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} -163376 \\ 0{,}0922 \\ 14995{,}5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El estimador de la varianza σ^2 en el nuevo modelo es:

$$\begin{aligned} S^{*2} &= p^2 S^2 = 1000000 * 4{,}36477 \\ &= 4364770 \end{aligned}$$

Utilizando la información muestral se tiene:

$$XX^t = \begin{bmatrix} 21 & 671{,}22 & 252{,}34 \\ & 14852{,}62 & 5076{,}34 \\ & & 3037{,}50 \end{bmatrix}$$

La matriz ve varianza-covarianza estimada para el nuevo modelo es:

$$\begin{aligned} Var(\widehat{\beta}^*) &= p^2\mathbf{P}^{-1}Var(\widehat{\beta})\mathbf{P}^{-1} = S^{*2}\mathbf{P}^{-1}XX^t\mathbf{P}^{-1} \\ &= 4364770 * \begin{bmatrix} 21 & 0{,}671 & 252{,}34 \\ & 0{,}0149 & 5{,}076 \\ & & 3037{,}50 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En la nueva escala el modelo se expresa como:

$$Q_i = -163376 + 0{,}0921767K_i + 14995{,}5L_i + \xi_i$$

La informacíon asociada a los coeficientes del modelo despúes de efectuar el cambio en la escala se resume en la siguiente tabla:

Variable	Coeficiente	Error Típico	t	sig
Constante	-163376	15.9711	-10.2295	0.000
K	0.0921767	0.0709338	1.29947	0.2102
L	14995.5	1.47422	10.1718	0.000

Tabla 9.23: Coeficientes estimados baja cambios de escala

Los demás estadísticos asociados al modelo de regresión lineal múltiple no sufren variaciones al cambiar la escala.

Capítulo 10

Análisis de covarianza

10.1. Preliminares

Uno de los problemas con el que frecuentemente se enfrenta el investigador, es el de controlar aquellos factores que no le es posible medir y cuyo efecto no puede justificar, los cuales constituyen el error experimental. Una de las formas de minimizar dicho error es mediante la aleatorización de los tratamientos y la utilización de material experimental muy homogéneo. Sin embargo, la aleatorización difícilmente cancela la influencia de las variables involucradas en el error y la disponibilidad de material experimental homogéneo no es frecuente en algunos experimentos.

Fisher (1932) desarrolló una técnica conocida como ***Análisis de Covarianza***, que combina el Análisis de Regresión con el Análisis de Varianza. Covarianza significa variación simultánea de dos variables que se asume están influyendo sobre la variable respuesta. En este caso se tiene la variable independiente tratamientos y otra variable que no es efecto de tratamientos, pero que influye en la variable de respuesta, llamada a menudo: *covariable*.

El Análisis de Covarianza consiste básicamente en elegir una o más variables adicionales o covariables que estén relacionadas con la variable de respuesta, evitando que los promedios de tratamientos se confundan con los de las covariables, incrementando de esa manera la precisión del experimento. Por ejemplo: número de plantas por unidad experimental, pesos iniciales en animales, grado de infestación de garrapatas, días de lactancia o edad de destete, etc.; pueden ser covariables que influyan en el resultado final y cuyo efecto de regresión sobre la variable respuesta el investigador desea eliminar, ajustando las medias de tratamientos a la media común de X. En este análisis se asume que la variable dependiente Y está asociada en forma lineal con la variable independiente X, existiendo homogeneidad de pendientes.

El análisis de covarianza (**ANCOVA**) es una técnica para conocer el efecto de una variable independiente categórica sobre una variable dependiente cuantitativa, eliminando el efecto de otra variable cuantitativa.

Es decir, el análisis de covariables, es una técnica para el análisis de diseños experimentales que incluyen variables cualitativos y cuantitativas en el componente sistemático, y cuyo objetivo fundamental consiste en eliminar la influencia que ejercen, sobre la variable dependiente, las variables cuantitativas o covariables. La función principal de este tipo de diseños es la aplicación de un control estadístico, que permite ajustar las puntuaciones de la variable dependiente y evitar el sesgo sistemático que pueden ocasionar, en los resultados, una o más covariables; en consecuencia, son diseños que proporcionan una estimación más precisa de la incidencia de los tratamientos administrados.

En palabras de Fisher, *el análisis de covarianza combina las ventajas e integran en un solo procedimiento dos métodos de gran aplicabilidad: el análisis de regresión y el análisis de la varianza*

10.2. Supuestos teóricos

Como es de esperarse, las suposiciones que se hacen cuando se efectúa un análisis de covarianza son similares a las requeridas para la regresión lineal y el análisis de varianza. De esta manera, se encuentran las suposiciones usuales de independencia, normalidad, homocedasticidad, X fijas, etc.

Al igual que el ANOVA, el ANCOVA es un procedimiento de análisis robusto a la violación de la normalidad y de la homogeneidad de la varianza, cuando se trabaja con diseños equilibrados. Sin embargo, no es una técnica robusta frente al incumplimiento de independencia. Además, la correcta aplicación de este procedimiento de análisis de datos requiere del cumplimiento de una serie de supuestos específicos, adicionales a los requeridos por el ANOVA.

A continuación serán abordados cada uno de los supuestos específicos del ANCOVA

Linealidad entre la variable dependiente y la covariable: la relación entre la variable dependiente y la covariable debe ser estrictamente lineal, cuando esta relación no es lineal, el ajuste sobre la media es improcedente; en consecuencia si no se cumple dicho supuesto, los datos deben ser transformados o debe emplearse otro tipo de modelo de análisis estadístico. El coeficiente de correlación de Pearson permite estimar la magnitud y dirección de la relación lineal entre la variable dependiente y la covariable.

Independencia entre la variable independiente y la covariable: la independencia entre la variable independiente y la covariable implica la ortogonalidad entre ellas; es decir, los tratamientos no ejercen ningún efecto sobre la covariable. En caso contrario sería cuestionable la aplicación del ANCOVA. En caso que los tratamientos ejerzan efectos estadísticamente significativos sobre la variable dependiente y sobre la covariable, al ajustar estadísticamente la variable dependiente a partir, de la covariable, se sustrae una parte del efecto experimental generado por el tratamiento, y por tanto, se genera un sesgo en la estimación de dicho efecto.

Para la verificación de este supuesto, se recomienda realizar un ANOVA, considerando a la covariable como variable dependiente, cuando se acepta la hipótesis nula, se puede concluir que la variable independiente y la covariable son independientes, es decir los diferentes grupos definidos por los niveles del factor son equivalentes respecto a la covariable.

Para entender intuitivamente el problema que se crea cuando las covariables son afectada por los tratamientos, considere la figura 10.1

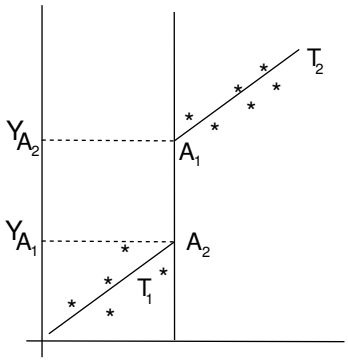

Figura 10.1: Covariables afectadas por los tratamientos

En este caso los valores bajos de y están asociados con valores bajos de x para el primer tratamiento T_1 y los valores altos en y están asociados con valores altos en x para el segundo tratamiento T_2. Si se aplica el análisis de covarianza para comparar los dos tratamientos, éstos se comparan respecto a $x = \overline{x}_{..}$; un valor que no se alcanza por alguno de los dos tratamientos, por lo cual se dice que la covariable es afectada por los tratamientos.

Homogeneidad entre las pendientes de la regresión: las pendientes de la regresión β_j deben ser iguales para cada grupo definido por los niveles del factor. Si las líneas de regresión de los grupos no son paralelas, significa que existen efecto de intersección entre los tratamientos y la covariable, es decir, que el efecto de la variable manipulada depende de los valores que obtiene cada sujeto en la covariable, los cual puede dificultar en gran medida la interpretación de los resultados. El incumplimiento de este supuesto genera un cambio importante en cuanto a la función de la covariable, la cual se convierte en una variable explicativa adicional, dejando su rol de variable extraña susceptible al control.

En consecuencia, si no se cumple este supuesto, resulta conveniente central el interés en el efecto de las interacciones y no en los efectos principales. Para algunos autores, cuando este supuesto no se cumple, se recomienda no aplicar el ANCOVA.

Fiabilidad en la medida de la covariable: este supuesto hace referencia a la necesidad de que la covariable sea medida sin error, es decir, se refiere al hecho de que exista fiabilidad en su medición. El no cumplimiento de este supuestos, en diseños no aleatorizados, produce sesgo en la estimación de las pendientes de regresión de los grupos, aumentando la probabilidad de cometer error del tipo I. Mientras que, en los diseños experimentales, el incumplimiento del supuesto en cuestión, genera perdida de la potencia en loa estimación de los efectos del tratamiento.

10.3. El modelo mátematico

El modelo analítico aplicado a los diseños experimentales con covariable es el *Análisis de Covarianza*. La ecuación estructural que define al análisis de covarianza, depende del tipo de diseño que se desea estudiar, a continuación sesrán estudiados algunos de los modelos de mayor interés.

10.3.1. Diseños unifactoriales

Los diseños unifactoriales al azar con una variable respuesta, un factor de interés y una covariable, pueden ser modelados mediante la ecuación estructural asociada a las predicciones, adoptando la expresión:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(X_{ij} - \overline{X}_{..}) + \varepsilon_{ij}, \;\; i = 1, 2, \cdots, k \;\; j = 1, 2, \cdots, n$$

Donde:

Y_{ij}	:	es la observación de la respuesta en el individuo i en el nivel j del factor.
μ	:	media general de la variable dependiente.
τi	:	efecto principal asociado al nivel i del factor.
β	:	coeficiente de regresión de la variable dependientes sobre la covariable.
X_{ij}	:	valor de la covariable en el individuo j y el nivel i.
$\overline{X}_{..}$	:	media de la covariable sobre la muestra.
ε_{ij}	:	residuo o componente aleatorio del modelo lineal.

Bajo los supuestos:

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes}$$

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$$

de donde

$$Y_{ij} \sim N\Big(\mu + \tau_i + \beta(X_{ij} - \overline{X}_{..}), \sigma^2\Big) \text{ independientes}$$

Usando el método de mínimos cuadrados permite estimar los coeficientes del modelo, los valores estimados son:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu} &= \overline{Y}_{..} \\ \widetilde{\tau}_i &= \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..} - \widetilde{\beta}(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..}) \\ \widetilde{\beta} &= \frac{E_{XY}}{E_{XX}} \end{aligned}$$

Donde:

$$
\begin{aligned}
S_{XY} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{..})(Y_{ij}-\overline{Y}_{..}) \\
S_{XX} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{..})^2 \\
S_{YY} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2 \\
T_{XY} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{..})(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..}) \\
T_{XX} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{..})^2 \\
T_{YY} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2 \\
E_{XY} &= S_{XY}-T_{XY}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{..})(Y_{ij}-\overline{Y}_{..}) \\
E_{XX} &= S_{XX}-T_{XX}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{..})^2 \\
E_{YY} &= S_{YY}-T_{YY}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2
\end{aligned}
$$

Para construir la tabla de ANCOVA y con ella poder estudiar las diferencias entre los distintos niveles del factor, se deben obtener la decomposición de la varianza en el modelo unifactorial, donde se considera como variable respuesta a la variable dependiente *ajustada* $Y^*_{ij}=Y_{ij}-\widetilde{\beta}(X_{ij}-\overline{X}_{..})$; obtenida al eliminar de la respuesta el efecto de la covariable.

La suma de cuadrados debida al factor en este modelo, es la que realmente recogerá la influencia del factor sobre la variable respuesta.

En el modelo *ajustado* la variabilidad total de los datos es:

$$\begin{aligned} SC^*_{Total} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(Y^*_{ij} - \overline{Y}^*_{..})^2 \\ &= S_{YY} - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2 - \frac{S^2_{XY}}{S_{XX}} \\ &= S_{YY} - \frac{S^2_{XY}}{S_{XX}} \end{aligned}$$

La suma de cuadrados del error es:

$$SS^*_{Error} = E_{YY} - \frac{E^2_{XY}}{E_{XX}}$$

Así, la variabilidad debida únicamente al factor despúes de eliminar los efectos de la covariable, vendrá agrupada en la suma de cuadrados del factor:

$$SC^*_{Factor} = SC^*_{Total} - SC^*_{Error}$$

Por último, el efecto de la covariable se mide a través de la suma de cuadrados siguiente:

$$SC_{Covariable} = \frac{E^2_{XY}}{E_{XX}}$$

A partir de las sumas de cuadrados y sus grados de libertad se construyen las tablas ANOVA para la variable dependiente y para la covariable:

Fuente	Sumas	G.L	Medias	F
Factor	SC^*_{Factor}	$a-1$	MC^*_{Factor}	$\frac{MC^*_{Factor}}{MC^*_{Error}}$
Covariable	$SC_{Covariable}$	1	$MC_{Covariable}$	$\frac{MC_{Covariable}}{MC^*_{Error}}$
Error	SC^*_{Error}	$k(n-1)$	MC^*_{Error}	
Total corregido	SC^*_{Total}	$N-1$		
Total	S_{YY}	N		

Tabla 10.1: ANOVA para la respuesta y la covariable

Cuando:

$$\begin{aligned} MC^*_{Factor} &= \frac{SC^*_{Factor}}{a-1} \\ MC^*_{Error} &= \frac{SC^*_{Error}}{a(n-1)} \\ MC_{Covariable} &= SC_{Covariable} \end{aligned}$$

La estructura general de los datos asociados a un diseño con covariable de un factor y una covariable se resumen en la tabla 10.2

Factor							
a_1			a_i			a_a	
X	Y	$\cdots$	X	Y	$\cdots$	X	Y
X_{11}	$Y11$		X_{i1}	$Yi1$		X_{1a}	$Y1a$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
X_{1j}	$Y1j$		X_{ij}	Y		X_{aj}	Yaj
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
X_{1n}	$Y1n$		X_{in}	Yin		X_{an}	Yan
$\sum X$	$\sum Y$		$\sum X$	$\sum Y$		$\sum X$	$\sum Y$
$\sum XY$			$\sum XY$			$\sum XY$	
$\sum X \sum Y$			$\sum X \sum Y$			$\sum X \sum Y$	

Tabla 10.2: Arreglos de datos para un diseño ANCOVA unifactorial

10.3.2. Diseños en bloques al azar

El modelo matemático que explica la respuesta en término de los efectos del factor, la variable de bloqueo y la covariable, se expresa como:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \rho_j + \beta(X_{ij} - \overline{X}_{..}) + \varepsilon_{ij} \;\; i = 1, 2, \cdots, t \;\; j = 1, 2, \cdots, t$$

donde:

μ : es la media poblacional.
τ_i : es el efecto del tratamiento i sobre la variable respuesta.
ρ_j : es el efecto del bloque j sobre la variable dependiente.
β : es el coeficiente de la regresión de y sobre x.
ε_{ij} : los errores del modelo lineal.

los $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ independientes.

Usando el método de mínimos cuadrados permite estimar los coeficientes del modelo, los valores estimados son:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu} &= \overline{Y}_{..} \\
\widetilde{\tau}_i &= \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..} - \widetilde{\beta}(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..}) \\
\widetilde{\sigma}^2 &= \frac{1}{(r-1)(t-1)-1} E_A = MC_{E(A)} \\
\widetilde{\beta} &= \frac{E_{XY}}{E_{XX}}
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
t_{XX} &= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(X_{ij}-\overline{X}_{..})^2 \\
t_{YY} &= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2 \\
t_{XY} &= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}(X_{ij}-\overline{X}_{..})(Y_{ij}-\overline{Y}_{..}) \\
B_{XX} &= \sum_{j=1}^{r}\frac{X_{.j}^2}{t}-\frac{X_{..}^2}{tr} \\
B_{YY} &= \sum_{j=1}^{r}\frac{Y_{.j}^2}{t}-\frac{Y_{..}^2}{tr} \\
B_{XY} &= \sum_{j=1}^{r}\frac{X_{.j}Y_{.j}}{t}-\frac{X_{..}Y_{..}}{tr} \\
T_{XY} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{..})(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..}) \\
T_{XX} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{..})^2 \\
T_{YY} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2 \\
E_{XY} &= t_{XY}-B_{XY}-T_{XY}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{XX} &= t_{XX}-B_{XX}-T_{XX} \\
E_{YY} &= t_{YY}-B_{YY}-T_{YY} \\
S_{XY} &= T_{XY}+E_{XY} \\
S_{XX} &= T_{XX}+E_{XX} \\
S_{YY} &= T_{YY}+E_{YY}
\end{aligned}$$

Además

$$S_A = S_{YY}-\frac{S_{XY}^2}{S_{XX}},\ T_{A(ajustado)} = S_A - E_A$$

Estimado β es necesario realizar el contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta = 0 \\ H_1 &: \beta \neq 0 \end{aligned}$$

aceptar H_0, implica la introducción de una variable irrelevante, que complicaría innecesariamente los cálculos. El estaístico de prueba

$$F = \frac{\frac{E_{XY}^2}{E_{XX}}}{MC_{Y*}} \sim F_{1,(n-1)(k-1)-1}$$

bajo H_0. La regla de decisión es análoga a cualquiera de las utilizadas en diseños antes estudiados.

Por otra parte, el estimador del coeficiente de correlación lineal de Pearson se define como:

$$r = \frac{S_{XY}}{\sqrt{SC_{E(X)}SC_{E(Y)}}}$$

Para el contraste de independencia lineal entre la respuesta y la Covariable:

$$\begin{aligned} H_0 &: \rho = 0 \\ H_1 &: \rho \neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico de prueba:

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} * \sqrt{n} \sim t_K$$

bajo H_0, cuando $K = GL_{error} - 1$. La regla de decisión es equivalente a la definida en contrastes de una muestra con dos colas.

La información completa del ANCOVA para modelos con variables de bloque, se resume en la tabla 10.3.

La varianza para la diferencia entre dos medias ajustadas está dada por:

$$\widetilde{V}ar(\overline{Y}_i - \overline{Y}_j) = MC_{E(Y*)} * \left[\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{\left(\overline{X}_i - \overline{X}_j\right)^2}{SC_{E(X)}}\right]$$

Cuando el número de repeticiones es el mismo para todos los tratamientos, la varianza estimada para la diferencia entre dos medias ajustadas está dada por:

		Sumas y productos			Ajuste a la regresión		
Fuente	G.L	$\sum X^2$	$\sum XY$	$\sum Y^2$	G.L		
Total	$rt-1$	t_{xx}	t_{xy}	t_{yy}			
Bloque(B)	$r-1$	B_{xx}	B_{xy}	B_{yy}			
Trata(T)	$t-1$	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
Error(E)	K	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$K-1$	E_A	$MC_{E(A)}$
$S=T+E$	$rt-r$	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}	$rt-r-1$	S_A	
TAjustado					$t-1$	T_A	$MC_{T(A)}$

Tabla 10.3: ANCOVA para diseños en bloques

$$\widetilde{V}ar(\overline{Y}_i-\overline{Y}_j)=MC_{E(Y*)}*\left[\frac{2}{n}+\frac{\left(\overline{X}_i-\overline{X}_j\right)^2}{SC_{E(X)}}\right]$$

Cuando los valores de $\overline{X}_1,\overline{X}_2,\cdots,\overline{X}_t$ no son muy diferentes, lo que se puede concluir cuando los tratamientos no producen efectos significativos en la variable X, se puede usar una estimación media para la varianza, aplicable a cualquier contraste entre dos tratamientos. Esta estimación media tiene la siguiente expresión:

$$\widetilde{V}ar(\overline{Y}_i-\overline{Y}_j)=MC_{E(Y*)}*\left[\frac{2}{n}+\frac{MC_{Tratamiento(X)}}{SC_{E(X)}}\right]$$

10.3.3. Diseños cuadrados latinos

Las técnicas de análisis consideradas en las secciones anteriores pueden extenderse de manera directa a diseños en cuadrado latinos con presencia de una covariable. Al igual que en el diseño de bloques aleatorios, el modelo analítico que se utiliza habitualmente para llevar a cabo la prueba de hipótesis en diseños cuadrados latinos con covariable, es similar al estudiado en la sección anterior.

Suponiendo una estructura básica de tres factores y una covariable, el modelo matemático estructural que subyace al análisis de covarianza, responde a la siguiente expresión:

$$Y_{ijl}=\mu+\tau_i+\rho_j+\gamma_l+\beta(X_{ij}-\overline{X}_{..})+\varepsilon_{ijl}\qquad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,k \\ j=1,2,\cdots,k \\ l=1,2,\cdots,k \end{matrix}$$

El desarrollo de un ANCOVA para datos resultantes de un diseño cuadrados latinos, no presenta nuevos conceptos. Las técnicas de cálculos son similares a las estudiadas con anterioridad. Solamente existen diferencias en las sumas y productos entre respuesta y covariables; los cuales se desarrollan a continuación:

Suma total de productos de X y Y

$$\sum xy = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} X_{ij(k)}Y_{ij(k)} - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} X_{ij(k)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} Y_{ij(k)}}{m^2}$$

Suma de productos de X y Y por filas

$$R_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k} X_{ij(k)}\right)\left(\sum_{j=1}^{k} Y_{ij(k)}\right)}{m} - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} X_{ij(k)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} Y_{ij(k)}}{m^2}$$

Suma de productos de X y Y por columnas

$$C_{xy} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k} X_{ij(k)}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} Y_{ij(k)}\right)}{m} - \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} X_{ij(k)}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} Y_{ij(k)}}{m^2}$$

Suma de productos de X y Y de los tratamientos

$$T_{xy} = \frac{\sum_{k=1}^{k} T_{xk}T_{yk}}{m} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} X_{ij(k)}\right)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} Y_{ij(k)}}{m^2}$$

$$E_{XY} = \sum xy - R_{XY} - C_{XY} - T_{XY}$$

donde:

Txk : suma de todas las x en el tratamiento k

Tyk : suma de todas las y en el tratamiento k

La información del ANCOVA para diseños cuadrado latinos se resume en la tabla 10.4

		Sumas y productos			Regresión		
Fuente	GL.	$\sum X^2$	$\sum XY$	$\sum y^2$		GL	MC
Fila	$k-1$	R_{XX}	R_{XY}	R_{YY}			
Columnas	$k-1$	C_{XX}	C_{XY}	C_{YY}			
Tratam	$k-1$	T_{XX}	T_{XY}	T_{YY}			
Error	R	R_{XX}	E_{XY}	E_{YY}	S_E	$R-1$	$\frac{S_E}{R-1}$
T+E	$(k-1)^2$				S_{T+E}	$(k-1)^2-1$	
Tratam*					S_{T*}	$k-1$	$\frac{S_{T*}}{k-1}$

Tabla 10.4: ANCOVA en cuadrados latinos

Cuando:

$$\begin{aligned} R &= (k-2)(k-2) \\ S_E &= E_{YY} - \frac{E_{xy}^2}{E_{XX}} \\ S_{T+E} &= S_{YY} - \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}} \\ S_{T*} &= S_{T+E} - S_E \\ &= T_{YY} - \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}} + \frac{E_{xy}^2}{E_{XX}} \end{aligned}$$

Despúes de desarrollar los diferentes modelo de ANCOVA estudiados, se puede concluir que, el **ANCOVA** busca ajustar la respuesta de interés Y por las correspondientes covariables X. Para cualquier tendencia lineal, los ajustes de las Y para diferentes X se hacen sustraendo de las y_{ij} la cantidad $\widetilde{\beta}(X_{ij} - \overline{X}_{..})$, es decir,

$$y_{sij} = y_{ij} - \widetilde{\beta}(X_{ij} - \overline{X}_{..})$$

el valor ajustado por efecto de la covariable. En la figura 10.2 se ilustra los conceptos en discución.

En la figura anterior, se busca ubicar todas las observaciones sobre la línea $X = \overline{x}$, a través de líneas paralelas y de la recta:

$$\widehat{Y} = \overline{Y} + \widetilde{\beta}(X - \overline{X})$$

ya que éstos, eliminan los X de consideraciones adicionales. Obasérvese que, los $\widehat{Y}_{sij}$ dependen de $\widehat{\beta}$, lo cual los hace una variable aleatoria. Cuando las observaciones Y han sido ajustadas por las covariables X, todas ellas tendrán el mismo valor $X = \overline{X}$, este proceso de ajuste reduce el problema original de dos variables a un problema de un ANOVA con las variables Y^*.

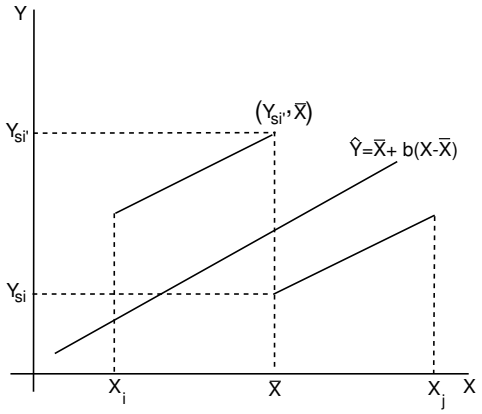

Figura 10.2:

Se debe tener en cuenta, sin embargo, que el ajuste fue hecho por medio de las estimaciones de $\widehat{Y}$ de la relación lineal de X y Y, lo cual hace más complejo el ANCOVA que el ANOVA

10.4. Covarianza múltiple

En la discusión hasta ahora de la técnica de análisis de covarianza se ha considerado el caso más simple, pero al mismo tiempo el más importante, que es el caso de una sola covariable X y la relación lineal de ésta con las observaciones Y a través de los tratamientos. Sin embargo, pueden existir situaciones donde la relación entre X y Y es de forma polinomial o también se pueden considerar más covariables $X_1, X_2, \cdots$ las cuales tienen una relación lineal o polinomial con Y.

La anterior problemática, es solucionado usando el modelo general de covarianza para un vector Y de observaciones $n \times 1$, el cual se puede expresar como:

$$Y = X\theta + Z\eta + \varepsilon$$

donde $X\theta$ representa la parte asociada a las variables de clasificación y $Z\eta$ presenta la parte asociada a las covariables involucradas en el modelo, X y Z son matrices de constantes conocidas de dimensiones $n \times p$ y $n \times d$, respectivamente, θ y η son vectores de parámetros desconocidos de tamaños $p \times 1$ y $d \times 1$, respectivamente, y ε es un vector de errores $n \times 1$ con $E(\varepsilon) = 0$ y $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I$.

Si se excluyen las covariables o si $\eta = 0$, entonces el modelo lineal se reduce a:

$$Y = X\theta + \varepsilon^*$$

La descomposición ortogonal de Y está dada por:

$$Y = X(X^tX)^{-1}X^tY + [I - X(X^tX)^{-1}X^t]Y = P_XY + (I - P_X)Y$$

donde $P_X = X(X^tX)^{-1}X^t$ y además P_X y $I - P_X$ son matrices idempotentes. $(I - P_X)Y$ es el vector de residuales y $Y^t(I - P_X)Y$ es la suma de cuadrados residual.

El modelo lineal se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} Y &= X\theta_0 + (I - P_X)Z\eta + \varepsilon \\ &= X(\theta_0 - (X^tX)^{-1}X^tZ\eta) + Z\eta + \varepsilon \end{aligned}$$

de este modo $\theta = \theta_0 - (X^tX)^{-1}X^tZ\eta$

Utilizando la expresión anterior se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones normales:

$$\begin{pmatrix} X^tX & X^t(I - P_X)Z \\ Z^t(I - P_X)X & Z^t(I - P_X)Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\theta}_0 \\ \widehat{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^tY \\ Z^t(I - P_X)Y \end{pmatrix}$$

la cual se reduce a:

$$\begin{pmatrix} X^tX & 0 \\ 0 & Z^t(I - P_X)Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\theta}_0 \\ \widehat{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^tY \\ Z^t(I - P_X)Y \end{pmatrix}$$

de la expresión anterior, se obtiene inmediatamente:

$$\widehat{\theta}_0 = (X^X)^{-1}X^tY$$

es decir, el estimador de θ bajo el modelo lineal. Además,

$$\begin{aligned} \widehat{\eta} &= [Z^t(I - P_X)Z]^{-1}Z^t(I - P_X)Y \\ \widehat{\theta} &= \theta_0 - (X^tX)^{-1}X^tZ\widehat{\eta} \end{aligned}$$

Las varianzas de los anteriores estimadores son:

$$\begin{aligned} Var(\widehat{\theta}_0) &= (X^tX)^{-1}\sigma^2 \\ Var(\widehat{\eta}) &= [Z^t(I - P_X)Z]^{-1}\sigma^2 \end{aligned}$$

y como $\widehat{\theta}_0$ y $\widehat{\eta}$ no son correlacionados, entonces:

$$Var(\widehat{\theta}) = [(X^tX)^{-1} + (Z^t(I - P_X)Z)^{-1}]\sigma^2$$

Los elementos de $Z^t(I - P_X)Z$ son la suma de cuadrados del error (elementos de la diagonal) y la suma del error de los productos (elementos fuera de la diagonal) para el modelo lineal cuando las columnas de Z se toman como un vector de "observaciones". Análogamente, los elementos del vector $Z^t(I - P_X)Y$ son las correspondientes sumas del error de los productos usando alternativamente las columnas de Z con el vector de observaciones Y. De este modo, se tiene una forma fácil de obtener $\widehat{\eta}$ y $\widehat{\theta}_0$.

La suma de cuadrados del error se obtiene de forma usual, como:

$$SCE = Y^tY - \widehat{\theta}_0X^tY - \widehat{\theta}_0Z^t(I - P_X)Y$$

la anterior expresión, también se puede expresar como:

$$SCE = SCE_{MR} - \widehat{\eta}Z^t(I - P_X)Y$$

donde SCE_{MR} es la suma de cuadrados del error asociada al modelo lineal modificado. En esta última expresión, se comprueba que SCE a través del modelo lineal inicial es más pequeña que la SCE para el modelo lineal modificado, y la reducción es de $\widehat{\eta}Z^t(I - P_X)Y$.

A partir de SCE se puede encontrar la siguiente estimación para σ^2:

$$\widehat{\sigma}^{=}\frac{SCE}{n - p - d} = CME$$

Finalmente, para contrastar alguna hipótesis sobre θ o subvectores de

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

por ejemplo, $H_0 : \theta_1 = \theta^*$, se ajusta el modelo:

$$Y = X^* \begin{pmatrix} \theta^* \\ \theta_2 \end{pmatrix} + Z\eta + \varepsilon$$

a partir de este último modelo se encuentra la suma de cuadrados del error SCE^*, realizando el mismo procedimiento presentado anteriormente. Suponga que H_0 es de rango s, entonces el estadístico de prueba es:

$$F = \frac{(SCE^*!`SCE)/s}{CME}$$

si este valor es mayor que $F_{s,n-p-d,\alpha}$ se rechaza la hipótesis nula ($H_0 : \theta_1 = \theta^*$). Adicionalmente, si se quiere contrastar $H_0 : \eta = 0$, se hace uso del estadístico de prueba:

$$F = \frac{R(\eta/\theta)/d}{CME}$$

donde $R(\eta/\theta) = R(\theta, \eta) - R(\theta)$, con $R(\theta, \eta)$ la suma de cuadrados asociada al modelo lineal inicial y $R(\theta)$ la suma de cuadrados del modelo obtenida a partir del modelo modificado. En este caso, si $F > F_{s,n-p-d,\alpha}$ se rechaza la hipótesis $H_0 : \eta = 0$, encontrando asociación entre las covariables y la variable respuesta a través de los diferentes factores de clasificación.

10.5. Uso del SPSS

El procedimiento *Modelo lineal generalizado* del SPSS permite realizar el Análisis de Covarianza **ANCOVA**, de manera similar al análisis factorial de la varianza

Para ejecutar un análisis univariante mediante el *Modelo lineal generalizado* ejecute la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal generalizado --> Univariado
```

En la caja de diálogo asociada a la secuencia de comandos, seleccioné los campos de interés:

```
Dependiente: Variable repuesta
Independientes: factores  estudiados
Covariable: variable continua que puede
            afectar a la respuesta
Modelo: Personalizado
  Construir términos: Efectos principales
  de factores y covariable, Interacción
     Factores*Covariable
   Suma de cuadrados Tipo III
   Incluir intersección en el modelo
  Continuar
Opciones:
    Estimación del tamaño de los efectos
  Continuar
Aceptar
```

Las cajas de diálogo son las ya conocidas de los diseños factoriales, estudiados en capítulos anteriores.

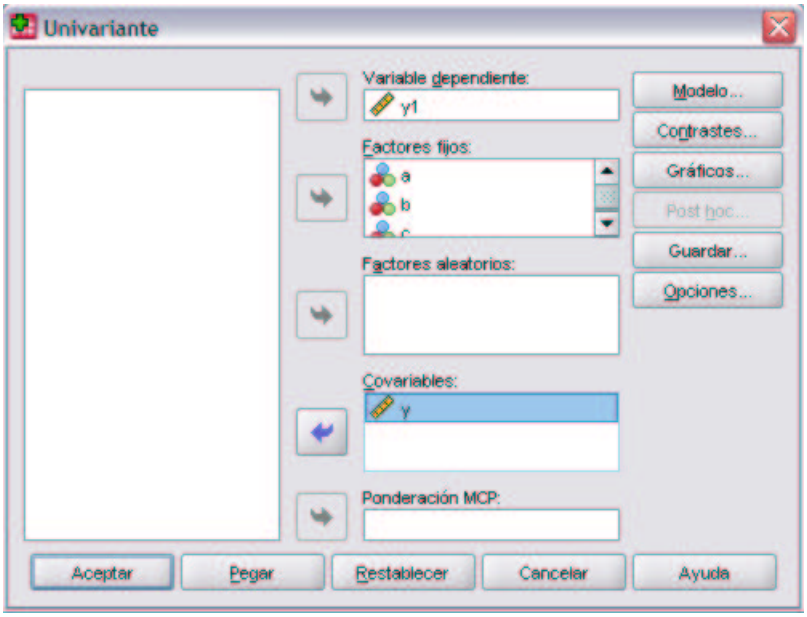

Figura 10.3:

Antes de desarrollar la solución de problemas mediante la aplicación del SPSS es conveniente algunos comentarios acerca del modelo matemático usado por el software en la corrida de modelos con covariables.

Para los diseños unifactoriales de ANCOVA, se ha discutido la ecuación

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta(x_{ij} - \overline{x}_{..}) + \varepsilon_{ij} \;\; i = 1, \cdots, k; j = 1, \cdots, n$$

mientras que el SPSS utiliza la ecuación:

$$y_{ij} = \mu' + \alpha'_i + \beta' x_{ij} + \varepsilon_{ij} \;\; i = 1, \cdots, k; j = 1, \cdots, n$$

donde: $\alpha'_k = 0$; además ambos conjuntos de términos satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} \alpha'_i &= \alpha_i - \alpha_k \\ \mu' &= \mu + \alpha_k - \beta\overline{x}_{..} \end{aligned}$$

10.6. Solución de problemas

Problema 10.1 *Con el objeto de evaluar cuatro tipo de raciones en cerdos, se realizó una prueba de engorde. El diseño experimental utilizado fue completamente al azar con seis repeticiones. Los datos de ganancia de peso Y y el peso inicial X de los cerdos se resume en la tabla 10.5. Con la información aportada realize un ANCOVA y concluya.*

Tratamientos							
1		2		3		4	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
30	165	24	180	34	156	41	201
27	170	31	169	32	189	32	173
20	130	20	171	35	138	30	200
21	156	26	161	35	190	35	193
33	167	25	185	32	160	29	144
28	150	24	176	30	180	34	189

Tabla 10.5: Peso de cerdos

La variable de respuesta es **el peso final de los cerdos**, el factor de interés es el tipo de fórmula balanceada usada en la alimentación de los cerdos, mientras que la covariable es el peso inicial de los cerdos. Las unidades experimentales son los cerdos con características similares, entre ellos.

El modelo matemático asociado a la situación experimental es:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta(x_i - \overline{x}_{...}) + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1,2,3,4, \quad j = 1,2,3,4,5,6$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} \alpha_i &= 0 \\ \varepsilon_{ij} &\sim N(0,\sigma^2) \text{ independientes} \end{aligned}$$

Cuando:

y_{ij}**:** es el peso final del cerdo j alimentado con la fórmula i.

μ**:** es el promedio de la población de cerdos.

$\overline{x}_{...}$**:** es el promedio muestral de los cerdos estudiados.

α_i**:** es el efecto medio adicional de la formula i sobre el peso final del cerdo.

β**:** es el incremento, sobre el peso final del cerdo debido al incremento unitario de su peso inicial.

Para establecer la independencia entre el factor y la covariable, se ejecuta la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> univariante
```

En la caja de diálogo asociada seleccione:

```
Dependiente: Peso final
Factores fijos: Fórmula, peso inicial
Aceptar
```

El reporte de la secuencia de comandos se resume en la tabla 10.6.

Fuente	Suma	GL.	Medias	F	sig.
Modelo corregido	6503,458[a]	20	325.173	.548	.825
Interacción	620368.847	1	620368.847	1045.272	.000
Fórmula	2182.917	3	727.639	1.226	.435
Inicial	3837.619	14	274.116	.462	.862
Interacción	445.226	3	148.409	.250	.858
Error	1780.500	3	593.500		
Total	706311.000	24			
Total corregido	8283.958	23			

a. R cuadrado = .785 (R cuadrado corregida = .648)

Tabla 10.6: ANOVA: interacción factor*coveriable

Como el $p-valor$ asociado al efecto de la covariable y el factor (Fórmula*Peso inicial) es igual a 0.858, indica que es mayor que los niveles de significancia considerados, en particular que $\alpha = 3\,\%$, entonces se acepta la independencia entre el factor y la covariable, por tanto es aplicable el diseño de ANCOVA para un modelo unifactorial.

El análisis de covarianza se obtiene mediante la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> univariante
```

En la caja de diálogo asociada seleccione:

```
Dependiente: Peso final
Factores fijos: Fórmula
Covariable: peso inicial
Aceptar
```

Fuente	Suma	GL.	Medias	F	sig.
Modelo corregido	2902,614[a]	4	725.653	2.562	.072
Interacción	5710.828	1	5710.828	20.163	.000
Inicial	633.489	1	633.489	2.237	.151
Fórmula	1705.417	3	568.472	2.007	.147
Error	5381.345	19	283.229		
Total	706311.000	24			
Total corregido	8283.958	23			

Tabla 10.7: ANCOVA

El reporte de la secuencia de comandos se resume en la tabla 10.7.

El $p - valor$ asociado al peso inicial en la tabla 10.7 es igual a 0.151, es decir es mayor a 0.03, por tal razón se rechaza la hipótesis nula que afirma influencia del peso inicial de los cerdos en el peso alcanzado después de ser alimentados con las fórmulas comerciales consideradas.

Al afirmar que no existe efecto significativo asociado al peso inicial de los cerdos, el diseño se convierte en un diseño unifactorial, cuando se elimina del modelo la covariable.

Para correr el diseño unifactorial ejecútese la secuencia de comandos:

```
Analizar --> comparar medias --> ANOVA de un factor
```

En la caja de diálogo asociada seleccione:

```
Dependiente: Peso final
Factores fijos: Fórmula
 Post hoc:
    Nivel de significancia: 0.03
   Continuar
Aceptar
```

La tabla de ANOVA posee $p-valor$ igual a 0.088 valor superior a 0.03, en otras palabras, los fórmulas usada no generan efectos alguno sobre la variable dependiente peso final. Ver tabla 10.8.

En conclusión, el peso inicial de los cerdos usados en el ensayo ni las cuatro fórmulas balanceadas usados generan efectos estadísticamente significativos al 3 % sobre el peso final alcanzado por los cerdos en el ensayo.

Problema 10.2 *Un productor agrícola, desea evaluar el efecto de cuatro fertilizantes sobre el crecimiento de plantas de Maíz durante los primeros 45*

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig
Fórmulas	2269.125	3	756.375	2.515	.088
Error	6014.833	20	300.742		
Total	8283.958	23			

Tabla 10.8: ANOVA para las Fórmulas

días despúes de la fertilización. La experiencia previa le indica que la altura de la planta está afectada por la altura que ésta tiene al momento de realizar la fertilización. Con el fin de corroborar sus sospechas el productos selecciona 24 plantas, las agrupa en bloques de 4 plantas, mide la altura actual y aplica al azar a cada grupo un fertilizante. Pasados los 45 días realiza la medición de las plantas; la información del ensayo se resume en la tabla 10.9.

Fertilizantes							
Fertilizante 1		Fertilizante 2		Fertilizante 3		Fertilizante 4	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
74.00	5.00	96.00	8.00	59.00	2.00	70.00	5.00
65.00	3.00	95.00	7.00	64.00	4.00	75.00	4.00
77.00	5.00	104.00	8.00	70.00	5.00	80.00	6.00
76.00	5.00	89.00	6.00	66.00	3.00	78.00	5.00

Tabla 10.9: Datos crecimiento

- *Describir el problema planteado, identificando los elementos. Escribir el modelo matemático.*
- *Establecer si la covariable es independiente del factor.*
- *Construir la tabla de ANOVA*
- *Determinar si la relación lineal entre la variable respuesta y la covariable es la misma para los cuatro niveles del factor.*

La variable respuesta que se mide durante el ensayo es la altura final de las plantas de maíz después de 45 días pasada la fertilización (Y). El factor de interés son los cuatro tipos de fertilizantes utilizados, mientras que la Covariable es la altura inicial de las plantas (Z). El modelo matemático es:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta(z_{ij} - \overline{z}_{..}) + \varepsilon_{ij} \;\; i, j = 1, 2, \cdots, 4$$

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i \;\; = \;\; 0 \;\; \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes}$$

Cuando:

y_{ij}**:** es la altura final de la planta j fertilizada con la fórmula i.

μ**:** es el promedio de la población de plantas.

$\overline{z}_{...}$**:** es la altura promedio muestral de las plantas estudiados.

α_i**:** es el efecto medio adicional de la formula i sobre la altura final de la planta.

β**:** es el incremento, sobre la altura final de la planta debido al incremento unitario de su altura inicial.

Para establecer la independencia entre el factor y la covariable, se ejecuta la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> univariante
```

En la caja de diálogo asociada seleccione:

```
Dependiente: Altura final
Factores fijos: Fertilizante, altura inicial
Aceptar
```

El reporte de la secuencia de comandos se resume en la tabla 10.10.

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig.
Modelo Corregido	2367,083[a]	11	215.189	12.535	.013
Intersección	76154.493	1	76154.493	4436.184	.000
X	93.379	3	31.126	1.813	.285
Z	198.710	6	33.118	1.929	.273
X*Z	38.646	2	19.323	1.126	.409
Error	68.667	4	17.167		
Total	98226.000	16			
Total corregido	2435.750	15			

a. R cuadrado = .972 (R cuadrado corregida = .894)

Tabla 10.10: ANOVA modelo completo

La tabla 10.10 en la fila asociada a la interacción de la covariable con el factor, reporta un $p - valor$ igual a 0.409, superior al nivel de significancia del 3 %, es decir la covariable es independiente del factor, en tal sentido es aplicable el modelo matemático formulado para un diseño con covariable y un factor. Por otra parte, este mismo valor sirve para efectuar el contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 \\ H_1 &: \text{ al menos uno distinto} \end{aligned}$$

Nuevamente el $p - valor$ de la fila asociada a la interacción permite aceptar H_0, por lo que, se ha comprobado que es correcto introducir en el modelo la covariable y la relación es la misma en los cuatro fertilizantes (homogeneidad de la pendiente de regresión).

Establecido el efecto de la covariable en la variable respuesta, y la homogeneidad de la pendiente de la regresión en el modelo de covarianza, se procede a estimar los efectos significativos del modelo. Para tal fin se ejecuta la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> univariante
```

En la caja de diálogo asociada seleccione:

```
 Dependiente: altura final
 Factores fijos: Fertilizantes
 Covariable: altura inicial
Opciones:
       Estadísticos descriptivos
       Estimación del tamaño del efecto
       Estimación de los términos
   Continuar
 Aceptar
```

El reporte de la secuencia de comandos se resume en las tablas siguientes:

La tabla 10.11 reporta los efecto del factor y la covariable como elementos de decisión del modelo. El $p - valor$ de la covariable es igual a 0.001 inferior al nivel de significancia, igualmente ocurre para el factor (sig.=0.015), por tal razón la covariable y el factor (fertilizantes) son significativos para el cálculo del valor medio de la respuesta. Por otra parte el η^2 de la covariable es igual a 0.643, lo cual indica que la covariable explica el 64.3 % de la altura final, de manera análoga el factor explica el 60 % de las variaciones.

El r-cuadrado del modelo es igual a 0.953, es decir, 95.3 % de la variabilidad de la altura final es explicada por el modelo de ANCOVA.

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig.	eta^2
Modelo Corregido	2320,270[a]	4	580.067	55.254	.000	.953
Intersección	1563.547	1	1563.547	148.934	.000	.931
Z	208.020	1	208.020	19.815	.001	.643
X	173.239	3	57.746	5.501	.015	.600
Error	115.480	11	10.498			
Total	98226.000	16				
Total corregido	2435.750	15				

a. R cuadrado = .953 (R cuadrado corregida = .935)

Tabla 10.11: ANCOVA

La tabla siguiente muestra el efecto de cada fertilizante en las plantas despues de 45 días. El fertilizante 2 fue el más eficiente, con 23 cm de promedio más que el 1; 31.25 cm más que el 3 y 20.25 cm más que el fertilizante 4, respecto al promedio total fue más efectivo en 18.62 cm.

Fertilizante	Media	Desviación típ.	N
1	73.00	5.477	4
2	96.00	6.164	4
3	64.75	4.573	4
4	75.75	4.349	4
Total	77.38	12.743	16

Tabla 10.12: Descriptivos

En la tabla 10.13, la columna B muestra las diferencias de los fertilizantes 1, 2 y 3 con el 4. El valor -0.730 del fertilizante 1 puede interpretarse como que, dadas dos plantas de igual altura inicial, se puede esperar que, luego de 45 días, la planta tratada con el fertilizante 1 tenga 0.730 cm menos que la tratada con el fertilizante 4. El valor 11.162 indica que, dadas dos plantas de igual altura inicial, se puede esperar que, luego de 45 días, la planta tratada con el fertilizante 2 tenga 11.162 cm más que la tratada con el fertilizante 4, finalmente dadas dos plantas de igual altura inicial, se puede esperar que, luego de 45 días, la planta tratada con el fertilizante 3 tenga 4.914 cm menos que la tratada con el fertilizante 4.

Por otra parte, el valor del parámetro asociado con la covariable es igual a 4.039, y representa el coeficiente de la regresón en el modelo de covarianza, el $p - valor$ asociado es igual a 0.001, el cual permite realizar el contraste:

$$H_0 \ : \ \beta = 0$$
$$H_1 \ : \ \beta \neq 0$$

por ser menor que 0.03, se rechaza la hipótesis nula y se corrobora la significancia del diseño aplicado.

					IC 97 %		
					Límite	Límite	
Parámetro	β	error	t	Sig.	Inferior	Superior	η^2
Intercepto	55.554	4.818	11.531	.000	44.950	66.157	.924
Z	4.039	.907	4.451	.001	2.042	6.036	.643
X=1	-.730	2.336	-.313	.760	-5.871	4.410	.009
X=2	11.162	3.069	3.637	.004	4.407	17.916	.546
X=3	-4.941	2.665	-1.854	.091	-10.807	.924	.238
X=4	0^a	.	.	.	.	.	.

a. Al parámetro se le ha asignado el valor cero porque es redundante.

Tabla 10.13: Parámetros estimados

Problema 10.3 *Un nutricionista desea comparar tres medicamentos A,B,C contra la obesidad. Pensando que el sexo del paciente puede influir también en el efecto del medicamento, s e selecciona una muestra de 9 hombres y 9 mujeres a los que se les asigna los medicamentos al azar en tres grupos. La variable respuesta es el peso perdido por el paciente, y se considera el peso inicial como una covariable.*

La información generada del ensayo se resume en la tabla 10.14.

		Sexo					
Tratamiento	Variable	H	H	H	M	M	M
A	Y	7.3	8.8	7.0	6.3	6	7.1
	X	80	93	78	80	76	72
B	Y	6.9	7.2	7.4	5.4	5.1	5.7
	X	82	86	90	74	60	78
C	Y	8.9	10.5	11.3	7.8	8.2	7.2
	X	82	88	97	77	75	70

Tabla 10.14: Datos del peso

- *Describir el diseño formulado, identificar cada elemento. Escribir el modelo matemático asociado.*

- *¿Es significativa la interacción entre los factores? ¿Es importante el efecto del peso inicial de la persona sobre el peso perdido?.*
- *Establecer si es necesario suponer relaciones lineales diferentes entre la variable respuesta y la covariable para hombres y mujeres, incluyendo en el modelo la interacción entre el sexo del paciente y la covariable.*
- *¿Existen diferencias en los pesos perdidos con los distintos fármacos?. ¿Y entre los pesos perdidos por los hombres y mujeres?*

La variable respuesta es el peso perdido durante el ensayo; los factores de interés son el sexo del paciente y los fármacos suministrado a cada paciente, con dos y tres niveles, respectivamente. Las unidades experimentales son los pacientes, a quienes se les registra el peso al momento de iniciar el ensayo, que puede influir posiblemente, sobre los kilogramos perdidos, se considerará como una covariable. Los tratamientos son las seis combinaciones de sexo y fármacos.

El modelo matemático a considerar inicialmente es:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + (\alpha\gamma)_{ij} + \beta(x_{ijk} - \overline{x}_{..}) + \varepsilon_{ijk}$$
$$i = 1,2,3, \;\; j = 1,2,3 \;\; k = 1,2,3$$
$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes}$$
$$\sum_{1=1}^{3} \alpha_i = 0 \text{ y } \sum_{j=1}^{2} \gamma_j = 0; \;\; \forall i = 1,2,3 \sum_{i=j}^{2} (\alpha\gamma)_{ij} = 0$$
$$\forall j = 1,2 \sum_{i=1}^{3} (\alpha\gamma)_{ij} = 0$$

y_{ijk}: son los kilogramos perdidos por el paciente k cuando le administran el medicamento i y su sexo es j.

x_{ijk}**:** es el peso inicial del paciente k que consume el medicamento j y su sexo es i.

Para establecer la existencia o no de interacción significativa entre los factores, se debe efectuar el contraste de hipótesis:

$$H_0 \;\; : \;\; (\alpha\gamma)_{ij} = 0 \;\; \forall i, j$$
$$H_1 \;\; : \;\; \text{al menos uno no nulo}$$

La deisión acerca del contraste se obtiene ejecutando la secuencia de comandos:

```
Analizar --> Modelo lineal general --> Univariante
```

En la caja de diálogo asociada se seleccionan sólo los campos:

```
Dependiente: Y
Factores fijos: Sexo, Fármaco
Covariable: X
Aceptar
```

Como aun no se ha establecido la significancia de la interacción de los factores se corrió el modelo completo; la información asociada a la secuencia de comandos anterior, se resume en la tabla 10.15.

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig
Modelo corregido	42,570[a]	6	7.095	24.736	.000
Intersección	.116	1	.116	.405	.537
X	3.152	1	3.152	10.987	.007
Sexo	1.331	1	1.331	4.641	.054
Fármaco	18.213	2	9.107	31.749	.000
Interacción	.523	2	.261	.911	.430
Error	3.155	11	.287		
Total	1044.770	18			
Total corregido	45.725	17			

Tabla 10.15: Prueba efectos inter-sujetos

El $p-valor$ asociado a la fila denotada como: *Farmaco*Sexo* (interacción) es igual a 0.430, valor superior a 0.03 nivel de significancia, por tal razón se rechaza el efecto significativo de la interacción de los factores sobre la variable respuesta, y se debe replantear el modelo sin interacción entre los factores.

Al descartar la significancia de la interacción entre los factores, se debe ejecutar la secuencia de comandos siguientes:

```
Dependiente: Y
Factores fijos: Sexo, Fármaco
Covariable: X
Modelo: Personalizado:
       Construir términos:
           Efectos principales: Sexo, fármaco, X
  Continuar
  Aceptar
```

El reporte de la secuencia de comandos se resume en la tabla 10.16.

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	Sig
Modelo corregido	42,047[a]	4	10.512	37.157	.000
Intersección	.072	1	.072	.255	.622
Sexo	1.256	1	1.256	4.441	.055
X	3.842	1	3.842	13.581	.003
Fármaco	18.139	2	9.070	32.059	.000
Error	3.678	13	.283		
Total	1044.770	18			
Total corregido	45.725	17			

R cuadrado = .920 (R cuadrado corregida = .895)

Tabla 10.16: Prueba de efectos inter-sujetos

La significancia de la covariable en el diseño está asociada al contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta = 0 \\ H_1 &: \beta \neq 0 \end{aligned}$$

El $p-valor$ asociado al estadístico de prueba es igual a 0.003, menor que el nivel de significancia del 3 %, por tanto la covariable es significativa y se debe considerar como un efecto significativo en la perdida de peso durante el ensayo.

Para incluir la posible interacción entre el factor sexo y la covariable, lo cual significa asumir que relación lineal entre el peso perdido y el peso inicial entre hombres y mujeres es distinta, se debe ejecutar la secuencia de comandos:

```
Dependiente: Y
Factores fijos: Sexo, Fármaco
Covariable: X
Modelo: Personalizado:
       Construir términos:
           Efectos principales: Sexo, fármaco, X
           Interacción: Sexo* X
  Continuar
  Aceptar
```

El reporte asociado se resume en la tabla 10.17.

Dado que el $p-valor$ asociado a la interaccción entre el sexo y la covariable es igual a 0.007, menor que el nivel de significancia, se deben considerar

Fuente	Sumas	GL.	Medias	F	sig
Modelo corregido	43,764[a]	5	8.753	53.568	.000
Intersección	.068	1	.068	.415	.532
Sexo	1.410	1	1.410	8.629	.012
X	3.448	1	3.448	21.103	.001
Fármaco	17.712	2	8.856	54.199	.000
Interacción	1.717	1	1.717	10.508	.007
Error	1.961	12	.163		
Total	1044.770	18			
Total corregido	45.725	17			

a. R cuadrado = .957 (R cuadrado corregida = .939)

Tabla 10.17: Prueba de efectos inter-sujetos

relaciones lineales distintas en hombres y mujeres, al estudiar el efecto del sexo y el peso inicial sobre la variable respuesta.

Ya que el $p-valor$ del factor fármaco es 0.000 se acepta la existencia de diferentes efectos asociados a cada tipo de fármaco empleado en el ensayo. Para establecer cual de los fármacos es el más efectivo en la perdida de peso, es necesario ejecutar una prueba *Post hoc*; particularmente se recomienda la prueba de Bonferroni, la cual se obtiene ejecutando la secuencia de comandos:

```
Dependiente: Y
Factores fijos: Sexo, Fármaco
Covariable: X
Modelo: Personalizado:
       Construir términos:
           Efectos principales: Sexo, fármaco, X
           Interacción: Sexo* X
  Continuar
   Opciones:
      Mostrar medias para: Fármacos
        Comparar los efectos principales
      Ajustes de intervalos de confianza: Bonferroni
    Continuar
  Aceptar
```

Los reportes de la prueba de Bonferroni se resumen en la tabla

Como el $p-valor$ de cada uno de los contrastes por pares son menores que 0.03, se aceptan las diferencias significativas en los distintos niveles del fármaco, por otra parte por ser las diferencias de medias del tercer medicamento

Fármaco	Fármaco	Diferencia			IC	
I	J	I-J	Error	Sig	inferior	superior
A	B	.899*	.245	.010	.152	1.646
	C	-1.564*	.243	.000	-2.306	-.822
B	A	-.899*	.245	.010	-1.646	-.152
	C	-2.463*	.240	.000	-3.194	-1.731
C	A	1.564*	.243	.000	.822	2.306
	B	2.463*	.240	.000	1.731	3.194

Tabla 10.18: Comparaciones por pares

positivas, se concluye que este fármaco es el más eficiente en la disminución del peso del paciente, caso contrario ocurre con el segundo medicamento.

Bibliografía

- **Agresti,A.**(1990)*Categorical Data Analysis*, New York. Wiley.
- **Arnau, J.** (1990) *Diseño Experimental Multivariante*. Madrid. Alianza.
- **Ato, M., López J. J. y Serrano, J.M.** (1981) *Fundamentos de estadística inferencial*. Murcia: Librería Yerba.
- **Box,G.E.P., Hunter,W.G., Hunter, J.S.** (1989) *Estadística para experimentadores*. Ed. Reverté. Barcelona.
- **Chacín, L.F.** (2000) *Diseño y Análisis de Experimentos.*UVC. Venezuela
- **Chambers, J.M., Cliveland,W.S.** (1983) *Graphical methods for data analysis*. Belmont, Wadsworth
- **Cochran, W. y Cox, G.** (1983) *Diseño de Experimentos*. Editorial Trillas, México.
- **Cramer, H.** (1946) *Mathematical methods of statistics*. Princeton. NJ. Princeton University Press.
- **Duncan, D.B.** (1955) *Multiple Range in multiple F test*. Biometrics 11, 1-42
- **Ferran, M.** (2000) *SPSS para Windows.*McGraw-Hill. España
- **Greenhouse, S.W. y Geisser, S.** (1959) *On methods in the analysis of profile data*. Psychometrika 24. 95-112
- **Gutiérrez, P.H. y De la Vara, S. R,S.** (2005) *Análisis y diseño de Experimentos*. McGraw-Hill. México.
- **Kuehl, R. O.** (2001). *Diseño de experimentos: Principios estadísticos para el diseño y análisis de investigaciones.* 2da edición, Thomson.

- **Lyman, Ott.** (1990) *An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis*. Duxbury Press. North Scituate, Massachusetts.
- **Meulman,J. W.J. Heiser SPSS Inc.** (2005) *SPSS Categories 14.0*. Chicago,U.S.A
- **Montgomery, D.** (2003).*Dise no y análisis de experimentos*. México, Segunda Edición, Grupo Editorial Limusa, S. A.
- **Ostle, B.** (1999) *Statistics in Reserch* The Iowa State University Press, 4^{th} Edict.
- **Peña, D.** (1993) *Estadística. Modelos y métodos 2: Modelos lineales y series temporales*. Alianza Universidad Textos. España.
- **Peterson, R. G.** (1985). *Design and analysis of experiments*. Marcel Dekker inc.
- **Prado, M.A.**(2005) *Análisis de datos con SPSS 13.0*. McGraw-Hill. España.
- **Rosenkratz,W.** (1992) *Introduction to probability and statistics for scientists*. McGraw-Hill. New York.
- **Scheffé, H.** (1959).*The Analysis of variance*. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- SPSS Inc. (2006) *Manual del usuario de SPSS Base versión 15.0*. Chicago,U.S.A
- **SPSS Inc.** (2006) *SPSS Modelos de regresión versión 15.0*. Chicago,U.S.A
- **SPSS Inc.** (2006) *SPSS Modelos avanzados versión 15.0*. Chicago,U.S.A
- **Tukey, J.** (1990) *Exploratory Data Analysis*. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- **Visauta,B.**(2007) *Análisis Estadístico con SPSS 14.0*. McGraw-Hill. España.

Índice alfabético

Adición de
  puntos centrales, 187
Ajuste de
  Huynh-Feldt, 273
  Lecoutre, 274
  Box, 273
  Geisser-Greenhouse, 272
  Huynh-Feldt, 274
  Quintana-Arvey, 275
  Quintana-Maxwell, 274
Algoritmo de Yates, 188
Análisis de
  Covarianza, 373
  los residuos , 332
ANCOVA, 374
  con SPSS, 389
  diseños unifactoriales, 376
  en Cuadrados latinos, 383
  en diseños en bloques, 380
  múltiple, 386
ANOVA
  con medidas repetidas, 267
  de dos factores, 123
  de k factores, 120
  de un factor, 32
  factorial, 122
  con medidas repetidas
    con un factor intrasujetos, 276
ANOVA
  con medidas repetidas
    en un factor, 275

Bloques
  de factoriales completos, 220
Box, 271

Calidad del ajuste, 321
Cambio de
  escala
    en modelos de regresión, 348
Coeficiente
  de correlación
    parcial, 344
  de correlación lineal
    múltiple, 339
Coeficiente R de
  Pearson, 323
Coeficiente beta, 320
Coeficiente de
  determinancia, 322
Comparaciones múltiples, 38
Componentes
  de la varianza, 129
Componentes de
  la varianza, 54
Covarianza, 15

Diagrama de dispersión, 318
Diseños
  2^k y 3^k
    con SPSS, 197
  anidados, 236
  con dos factores , 122
  con medidas repetidas
    en SPSS, 287
  cruzado-anidados, 248

con SPSS, 255
cuadrados latinos, 93
en bloque
al azar, 83
factoriales
con SPSS, 151
factoriales 2^k y 3^k, 173
Fraccionarios 2^k, 207
intermedios, 218
Jerárquicos, 235
saturados, 215
Diseños
2^k, 176
3^k, 194
fraccionarios con SPSS, 225
Grecolatinos, 101
con tres factores, 135
factoriales, 119
unifactoriales
con SPSS, 56
Diseños de experimentos, 7
Diseños de experimentos
con un sólo factor, 29
Diseõs
factoriales
fraccionarios, 207
Dise nos
en bloques
con SPSS, 104

Ecuación generatriz, 210
Ecuaciones normales, 319, 338
Error típico de estimación, 324
Estimación del modelo, 337
Estructuras
de confusión, 209

Factor
intra-sujeto, 5, 267
Factor
de incremento de la varianza, 346
Factores
bloque, 14
nuisance, 14
intersujeos, 267
Factores y niveles, 12
Fraccionales
divididas en bloques, 223

Gráficos P-P, 333

Homocedasticidad, 326

Inconsistencia de
los datos, 9
Inferencia
sobre las predicciones, 331
Inferencia
de los parámetros, 327
Intervalos de
confianza para los parámetros , 329
introducción de
variables cualitativas, 347

Método
étodo hacia atrás, 345
de los mínimos cuadrados, 318
hacia delante, 344
Stepwise, 345
Métodos
de inclusión de
Variables, 344
Media cuadrática
del efecto, 122
Media fracción, 213
Modelo con factores
de efectos aleatorios, 128
Modelo de
efectos fijos, 36
Modelo lineal
general, 152
Modelo matemático

factorial, 120
Modelo matemático
diseños en bloques, 85
unifactorial, 29
Modelos ANOVA
con tres factores mixtos, 147
Modelos con factores
de efectos fijos, 125
Modelos de
efectos aleatorios, 52
Modelos de ANOVA
anidados de
efectos aleatorios, 242
Modelos de ANOVA
anidados de
efectos mixtos, 244

No autoregresión, 326
No colinealidad, 326

Planificación de
un experimento, 10
Prueba de
Dunnett, 43
Fisher, 40
homogeneidad de la varianza, 50
Prueba de
Duncan, 43
Scheffé, 46
Tukey, 41
Pruebas de esfericidad, 271
Pruebas F
ajustadas, 272

Raíz caracteística
de Roy, 271
Regresión
lineal, 317
lineal
con SPSS, 349
lineal múltiple, 335
lineal simple, 318

Resolución, 212

Significancia
conjunta, 330
individual, 329
Suma de cuadrados
del efecto, 122
Sumas de
Cuadrados
factoriales, 121
Supuestos teóricos
del modelo de regresión, 325

Tolerancia, 346
Tratamientos, 13
Traza de
Hotelling-Lawley, 271
Pillai, 271

Variabilidad
experimenta;, 10
Variabilidad
sistemática, 9
no planificada, 10
Ventana de
sintaxis, 256, 257

Diseño Estadístico de Experimentos

Diseñar un experimento significa planearlo de modo que reúna la información pertinente al problema bajo investigación.

El diseño de un experimento es la secuencia completa de pasos tomados de antemano para asegurar que los datos apropiados se obtendrán de modo que permitan un análisis objetivo que conduzca a deducciones válidas con respecto al problema establecido.

Un diseño de experimento surge de la necesidad de responder a preguntas como:

- ¿***Cómo se va a medir el efecto de los tratamientos***?
- ¿***Cuáles son las características a analizar***?
- ¿***Qué factores afectan las características que se van a medir***?
- ¿***Cuántas veces deberá ejecutarse el experimento***?
- ¿***Cuál es la forma de análisis***?
- ¿***A partir de que valores se considera importante el efecto***?

Las respuestas a tales interrogantes se describen en el texto, producto de la experiencia como docente universitario del autor, la obra es una introducción al diseño y análisis estadístico de experimentos en el cual se estudian los diseños clásicos unifactoriales, factoriales, en bloques, jerárquicos, fraccionarios, con medidas repetidas, finalizando con el análisis de covarianza.

El contenido del texto, es muy similar a los diferentes títulos existentes en el mercado, quizás la mayor bondad de éste, es la aplicación de los diferentes modelos de diseño estadístico de experimentos asistido por una aplicación informática amigable como es el SPSS.

El lector al final de cada capítulo, después de aproximarse a los fundamentos teóricos asociada a cada diseño, se encuentra con la implementación del modelo matemático, descrito de manera simple y amena, a situaciones prácticas de interés, alusivas a diferentes situaciones reales, que facilitan el diseño y análisis estadísticos de experimentos.

ISBN: 978-980-12-4573-5